



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a XI-a

Subiecte

Problema 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea

$G = \{M(a) = I_2 + a \cdot A \mid a \in \mathbb{R}\}$. Arătați că:

- (a) $M(a) \cdot M(b) \in G$, pentru orice numere reale a și b .
- (b) pentru orice număr natural nenul n există $x_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = x_n \cdot A$

și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n}$. (Supliment GM 10/2023, enunț ușor modificat)

Problema 2. Se consideră mulțimea a matricelor de ordinul 3 care au toate elementele egale cu 1 sau cu -1 .

- (a) Determinați numărul elementelor mulțimii T și dați un exemplu de matrice inversabilă $A \in T$.
- (b) Arătați că, dacă $B \in T$ este o matrice inversabilă, atunci $\det B \in \{-4, 4\}$.

Problema 3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$, precum și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$a_n = \left\{ \sqrt{f(n)} \right\}, \forall n \geq 1$. ($\{t\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real t).

- (a) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și determinați limita sa.

- (b) Determinați numărul rațional k pentru care $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin k\pi x} = \frac{2}{\pi}$.

(Supliment GM 11/2023)

Problema 4. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_0 = 1, a_1 = 2$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2a_{n-1}}, (\forall) n \geq 1$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.