

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a IX-a

SUBIECTE:

1. a) Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate dacă și numai dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$
b) În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PA}$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BNM, CPN . Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate.
2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ numere reale. Să se determine minimul expresiei $E(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$, $x \in \mathbb{R}$

3. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a^{2n+1} + b^{2n+1} = 2a^n b^n$. Să se arate că $1 - ab$ este pătratul unui număr rațional.
4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x + d(y) = 6,5 \\ y + d(x) = 2,1 \end{cases}$$

$$\text{unde } d(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.