

Barem de corectare – Clasa a IX-a

Subiectul I

Numerele naturale impare sunt grupate în felul următor:

$$\{1\}, \{3,5\}, \{7,9,11\}, \{13,15,17,19\}, \dots$$

Aflați suma celor n numere impare din a n -a mulțime.

Soluție

Fie $a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*$ progresia aritmetică a numerelor naturale impare, iar A_n a n -a mulțime. Primul termen din A_n va fi $a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$, căci în primele $n - 1$ mulțimi avem: $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$ elemente. **(2p)** Ultimul termen din A_n va fi: $a_{\frac{n(n-1)}{2}+n} = a_{\frac{n(n+1)}{2}}$. **(1p)** Așadar suma elementelor mulțimii A_n este:

$$\begin{aligned} S_{\frac{n(n+1)}{2}} - S_{\frac{n(n-1)}{2}} &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2} \right]^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 - n^4 + 2n^3 - n^2}{4} \\ &= n^3 \end{aligned}$$

(3p), unde am notat $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2, n \in \mathbb{N}^*$. **(1p)**

Subiectul II

(2p) a) Arătați că: $[\sqrt{x}] = [\sqrt{[x]}], \forall x \in [0, \infty)$.

(5p) b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{1}{1-\{x\}} \right] = \frac{x}{3\{x\}}$.

Soluție

a) Dacă $[\sqrt{x}] = k \in \mathbb{N}$, atunci $k \leq \sqrt{x} < k + 1 \Rightarrow k^2 \leq x < (k + 1)^2 \Rightarrow k^2 = [k^2] \leq [x] \leq x < (k + 1)^2$. Atunci, punând sub radical această inegalitate, obținem: $k \leq \sqrt{[x]} < k + 1 \Rightarrow [\sqrt{[x]}] = k = [\sqrt{x}]$. **(2p)**

b) Cum $\{x\} \in [0,1)$, deducem că: $\frac{1}{1-\{x\}} \geq 1$, de unde găsim $k \in \mathbb{N}^*$ cu $\left[\frac{1}{1-\{x\}} \right] = \frac{x}{3\{x\}} = k$. **(0,5p)** De aici: $\{x\} = \frac{[x]}{3k-1}, [x] \in \{1, \dots, 3k-2\}$. **(1p)** De asemenea, prelucrând egalitatea de mai sus, obținem că: $1 - \frac{1}{k} \leq \{x\} < 1 - \frac{1}{k+1} \Rightarrow 3k - 4 + \frac{1}{k} \leq [x] < 3k - 4 + \frac{4}{k+1}$. **(1p)** Astfel ajungem la: $3k - 3 \leq [x] < 3k - 4 + \frac{4}{k+1} \Rightarrow 1 < \frac{4}{k+1} \Rightarrow k \in \{1,2\}$. **(1p)** Pentru $k = 1$ vom avea că: $0 = 3 \cdot 1 -$

$3 \leq [x] < 3 \cdot 1 - 4 + \frac{4}{1+1} = 1$, de unde $[x] = 0$ (nu convine). **(0,5p)** Pentru $k = 2$ avem: $3 = 3 \cdot 2 - 3 \leq [x] < 3 \cdot 2 - 4 + \frac{4}{3} = 3$, $(3) \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow \{x\} = \frac{3}{3 \cdot 2 - 1} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 3 + \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$. **(1p)**

Subiectul III

Numerele reale a, b, c verifică $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Să se demonstreze că $c(a + b) \leq \frac{3}{2} + ab$.

În caz de egalitate să se determine numerele a, b, c , cu a maxim.

Gazeta Matematică

Soluție:

Din inegalitatea mediilor avem că: $c(a + b) \leq \frac{c^2 + (a+b)^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}{2} = \frac{3}{2} + ab$. **(3p)**

Egalitatea are loc pentru $c = a + b$. **(1p)**

Astfel din $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = \frac{3}{2}$. Ne propunem să găsim a maxim. Singura condiție ca să existe $b \in \mathbb{R}$ cu $b^2 + ba + a^2 - \frac{3}{2} = 0$ este ca $\Delta = a^2 - 4\left(a^2 - \frac{3}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 6 - 3a^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq a^2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$. Deci valoarea maximă este $a = \sqrt{2}$, caz în care aflăm $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $c = a + b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **(3p)**

Subiectul IV

În $\triangle ABC$ trasăm bisectoarele AA', BB', CC' , unde $A' \in (BC), B' \in (CA), C' \in (AB)$, și notăm cu G centrul său de greutate.

(2p) a) Arătați că putem forma un triunghi având lungimile laturilor egale cu GA, GB și respectiv GC .

(5p) b) Dovediți că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ coincid doar dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

Soluție:

a) Întrucât $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$, deducem că acești vectori formează un triunghi. Evident, lungimile laturilor acestui triunghi sunt: $|\vec{GA}| = GA, |\vec{GB}| = GB$ și $|\vec{GC}| = GC$. **(2p)**

b) Se obține: $\vec{GA'} = \frac{b\vec{GB} + c\vec{GC}}{b+c}, \vec{GB'} = \frac{c\vec{GC} + a\vec{GA}}{c+a}, \vec{GC'} = \frac{a\vec{GA} + b\vec{GB}}{a+b}$. Înlocuind $\vec{GC} = -\vec{GA} - \vec{GB}$ în aceste relații și folosind că $\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \vec{0}$, se ajunge la: $\left(\frac{a}{a+b} - \frac{c}{b+c} + \frac{a-c}{c+a}\right)\vec{GA} + \left(\frac{b}{a+b} - \frac{c}{c+a} + \frac{b-c}{b+c}\right)\vec{GB} = \vec{0}$. Ținând seama că vectorii $\vec{GA}$ și $\vec{GB}$ nu sunt coliniari, deducem că cei doi coeficienți sunt nuli, adică: $(a - c) \cdot \left(\frac{b}{(b+a)(b+c)} + \frac{1}{c+a}\right) = 0 \Rightarrow a = c$ și $(b - c) \cdot \left(\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{1}{b+c}\right) = 0 \Rightarrow b = c$. În concluzie $a = b = c$, adică $\triangle ABC$ este echilateral. **(4p)**

Cealaltă implicație este evidentă. Finalizare. **(1p)**