OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a X-a

Barem de corectare

Problema 1

Condiții de existență $x \in (27, +\infty)$ **(1 p)**

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{x}-3\right) = a \Longrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^a = \sqrt[3]{x}-3$ (1)

şi $\lg\left(\sqrt[3]{x}+4\right) = b \Rightarrow 10^b = \sqrt[3]{x}+4$ (2).

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^a - 10^b = -7$ (3) **(1 p)**

Cu notațiile făcute, ecuația din enunț devine: $\left(\frac{1}{10}\right)^a - 3^b = 7$ (4)

Adunând relațiile (3) şi (4) se obține: $\left(\frac{1}{3}\right)^a - 3^b + \left(\frac{1}{10}\right)^a - 10^b = 0 \Leftrightarrow \left(3^{-a}-3^b\right)+\left(10^{-a}-10^b\right)=0$. **(1 p)**

Dacă $-a < b$, $3^{-a} < 3^b$, $10^{-a} < 10^b$ şi $\left(3^{-a}-3^b\right)+\left(10^{-a}-10^b\right)<0$ **(1 p)**

Dacă $-a > b$, $3^{-a} > 3^b$, $10^{-a} > 10^b$ şi $\left(3^{-a}-3^b\right)+\left(10^{-a}-10^b\right)>0$ **(1 p)**

Deci $-a = b$. Ecuația (4) devine: $\left(\frac{1}{10}\right)^{-b} - 3^b = 7$ sau $10^b - 3^b = 7$.

Se observă că b=1 este soluție . **(1 p)**

$10^b - 3^b = 7 \Rightarrow 7 + 3^b = 10^b \Rightarrow 7\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^b + \left(\frac{3}{10}\right)^b = 1$

Funcția $f:(\lg 7, +\infty)\to(0, +\infty)$, $f(b) = 7\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^b + \left(\frac{3}{10}\right)^b$ este strict descrescătoare, deci injectivă şi ecuația $f(b) = 1$ va avea soluția unică b=1.

Pentru b=1 avem $\sqrt[3]{x} = 10^b - 4 = 10 - 4 = 6$, $x = 6^3 = 216 \in (27, +\infty)$ **(1 p)**

Problema 2. $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ şi $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}$ **(2 p)**

$\frac{1}{z}=\cos\frac{\pi}{6}\mp i\sin\frac{\pi}{6}$ **(2 p)**

$z^{2013}+\frac{1}{z^{2013}}=\cos\frac{2013\pi}{6}\pm i\sin\frac{2013\pi}{6}+\cos\frac{2013\pi}{6}\mp i\sin\frac{2013\pi}{6}=2\cos\frac{2013\pi}{6}$ **(2 p)**

În concluzie $z^{2013}+\frac{1}{z^{2013}}=0$ **(1 p)**

Problema 3

Notăm $x=\log_a b$, $y=\log_b c$, $z=\log_c a$, de unde obținem că x,y,z >0 şi xyz=1 **(2p)**

$\frac{1}{2+\log_a b}+\frac{1}{2+\log_b c}+\frac{1}{2+\log_c a}\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\le 1 \Leftrightarrow xy+yz+xz\ge 3$ **(3p)**

Ultima inegalitate se poate demonstra cu inegalitatea mediilor. **(2p)**

Problema 4

x=1 soluție a ecuației **(1 p)**

$\left(\frac{2}{10}\right)^x+\left(\frac{3}{10}\right)^x+\left(\frac{5}{10}\right)^x=1$ $\left(\frac{1}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{10}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$ **(1 p)**

Funcția $f:\mathbf{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{10}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci injectivă **(3p)**

Rezultă că x=1 este soluție unică pentru ecuația f(x)=1 **(2p)**

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Str. Mihai Eminescu nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54,
Tel./fax: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
+40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro
E-mail: isjbihor@yahoo.com