Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a X-a

Problema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ astfel încât $|a-b| = |a+b-2z|$.

a) Să se arate că ecuaţia $|z-a|^x + |\overline{z}-b|^x = |a-b|^x$, cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, are soluţie unică.

b) Să se rezolve inecuaţia $|z-a|^x + |\overline{z}-b|^x \le |a-b|^x$, cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. a) Fie $u = z-a$, $v = z-b$. Avem $|v-u| = |u+v|$ şi $u, v, u+v \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, deci $u, v, u+v \neq 0$.

Relaţia $|u+v| = |v-u|$ implică $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ .... $(2p)$

Deoarece $|v| = |\overline{v}|$, ecuaţia devine $|u|^x + |v|^x = \left(\sqrt{|u|^2+|v|^2}\right)^x$, sau

$$\left(\frac{|u|}{\sqrt{|u|^2+|v|^2}}\right)^x + \left(\frac{|v|}{\sqrt{|u|^2+|v|^2}}\right)^x = 1.$$

Se observă soluţia $x = 2$.. .... $(2p)$

Cum funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\frac{|u|}{\sqrt{|u|^2+|v|^2}}\right)^x + \left(\frac{|v|}{\sqrt{|u|^2+|v|^2}}\right)^x$$

este strict descrescătoare, soluţia este unică. .... $(1p)$

b) Din monotonia funcţiei f, deducem că soluţia inecuaţiei este intervalul $[2, +\infty)$.. .... $(2p)$

Problema 2. Fie $a, b \in \mathbb{C}$. Să se arate că $|az + b\overline{z}| \le 1$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$, dacă şi numai dacă $|a| + |b| \le 1$.

Soluţie. Să presupunem $|a| + |b| \le 1$, şi fie $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$. Atunci

$$|az + b\overline{z}| \le |az| + |b\overline{z}| = |a| + |b| \le 1.$$

.... $(2p)$

Reciproc, dacă $a = 0$ sau $b = 0$, implicaţia e evidentă. Dacă $a, b \neq 0$, scriem $\frac{b}{a} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Pentru $z = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}$, avem

$$\begin{aligned} 1 \ge |az + b\overline{z}| &= |a|\,|\overline{z}|\left|z^2 + \frac{b}{a}\right| \\ &= |a|\,|(1+r)(\cos\alpha + i\sin\alpha)| \\ &= |a|(1+r) = |a|\left(1 + \left|\frac{b}{a}\right|\right) \\ &= |a| + |b|. \end{aligned}$$

. . . . (5p)

Problema 3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} ax, & x\in\mathbb{Q} \\ bx, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases},$$

unde a şi b sunt două numere reale nenule.

Să se arate că f este injectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

Soluţie. Vom arăta că f este injectivă $\iff \frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$.

Să presupunem că f este injectivă. Dacă $\frac{a}{b}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $f\left(\frac{a}{b}\right)=a=f(1)$, contradicţie. . . . . (2p)

Să presupunem $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ şi fie x_1,x_2 astfel ca $f(x_1)=f(x_2)$. Dacă $x_1,x_2\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sau $x_1,x_2\in\mathbb{Q}$, obţinem imediat $x_1=x_2$. Dacă $x_1\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ şi $x_2\in\mathbb{Q}$, obţinem $ax_2=bx_1$, deci $\frac{a}{b}=\frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, contradicţie. Deducem că f este injectivă. . . . . (1p)

Vom arăta că f este surjectivă $\iff \frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$.

Să presupunem că f este surjectivă. Atunci există x real astfel ca $f(x)=b$. Dacă $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ atunci obţinem $bx=b$, deci $x=1$, contradicţie. Deducem că x e raţional şi atunci avem $ax=b$, deci $\frac{a}{b}=\frac{1}{x}\in\mathbb{Q}$. . . . . (2p)

Reciproc, fie $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ şi $y\in\mathbb{R}$, arbitrar. Nu putem avea simultan $\frac{y}{a}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ şi $\frac{y}{b}\in\mathbb{Q}$, deci $f\left(\frac{y}{a}\right)=y$ sau $f\left(\frac{y}{b}\right)=y$. Rezultă că f este surjectivă. . . .(2p)

Problema 4. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că numărul

$$2\sqrt{2^n}\cos\left(n\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

este număr întreg impar.

Soluţie. Fie $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$ şi $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$. Cum $\cos n\alpha=\frac{1}{2}\left(z^n+\overline{z}^n\right)$, avem

$$2\sqrt{2^n}\cos n\alpha=\sqrt{2^n}(z^n+\bar{z}^n)=S_n.$$

. . . . (3p)

Din relaţia

$$z^n+\overline{z}^n=(z+\overline{z})\left(z^{n-1}+\overline{z}^{n-1}\right)-z\overline{z}\left(z^{n-2}+\overline{z}^{n-2}\right),$$

deducem

$$S_n=S_{n-1}-2S_{n-2},$$

pentru $n\geq 3$. . . . . (2p)

Deoarece $S_1=1$ şi $S_2=-3$, rezultă inductiv că S_n este număr întreg impar. . . . . (2p)