



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 1 FEBRUARIE 2020
Clasa a V-a

Problema 1. Un număr natural mai mare decât zece și mai mic decât o sută este numit „*dublu prim*”, dacă cele două cifre ale numărului sunt numere prime (de exemplu: 22, 23, 72 etc.)

a) Câte numere „*dublu prim*” există?

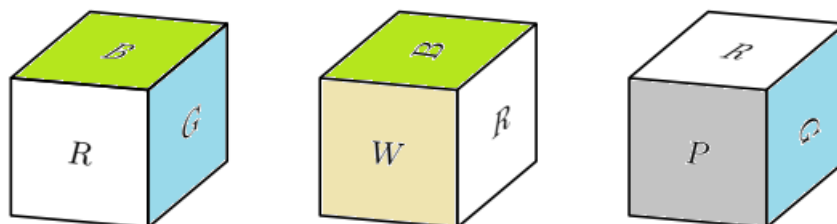
b) Bunicul îl roagă pe Alex să îl ajute la udatul grădinii. Dintr-un butoi care conține 200 litri de apă ei trebuie să toarne o parte din această cantitate în mai multe recipiente. Alex, pentru a-și exersa aptitudinile matematice, toarnă în fiecare recipient un număr de litri de apă care este un număr „*dublu prim*”, dar și prim în același timp. Dacă în toate recipientele folosite a turnat cantități diferite de apă, determină numărul minim de litri de apă care poate să rămână în butoi.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: a) 16; b) Numerele prime dintre numerele „*dublu prim*” sunt 23, 37, 53 și 73. Suma lor este 186, deci numărul minim de litri de apă care poate să rămână în butoi este $200 - (23 + 37 + 53 + 73) = 14$.

Problema 2. Tudor, după ce a scris pe fiecare din fețele unui cub una dintre literele A, B, G, P, R, W, a așezat cubul pe masă în trei poziții diferite, a făcut fotografii, și a obținut pozele prezentate în figura mai jos.

Două fețe ale unui cub se numesc alăturate dacă au o muchie comună și se numesc opuse dacă nu au nicio muchie comună (De exemplu, în desenul de mai jos, fețele pe care sunt scrise literele B, G, P, W sunt cele patru fețe alăturate feței pe care scrie litera R, iar fața care nu apare în poze, fața pe care scrie litera A, este fața opusă feței pe care scrie litera R.). După o perioadă de timp, Tudor s-a uitat numai la poze și nu a reușit să identifice ce literă a scris pe față opusă feței pe care este scrisă litera W.



Care este litera scrisă pe față opusă feței pe care este scrisă litera W? (justifică răspunsul)

Viorica Stoianovici, Călărași

Soluție: (i) Fețele B, P și R sunt alăturate feței G. (ii) Fața A este opusă feței R, deci alăturată feței G. Din (i) și (ii) rezultă că fețele G și W sunt opuse.

Problema 3. Un număr $\overline{abcd}$, format din cifre nenule, se numește „*superior*” dacă $a = b \cdot c \cdot d$.

a) Calculați diferența dintre cel mai mare număr „*superior*” și cel mai mic număr „*superior*”.

b) Câte numere „*superioare*” există?

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnoși

Soluție: a) $9911 - 1111 = 8800$; b) (i) Există 2 numere „*superioare*” care au cifra sutelor egală cu cifra zecilor și egală cu cifra unităților și produsul acestor cifre este tot o cifră, 1111 și 8222. (ii) Există 10 grupe de câte trei cifre, două din ele fiind egale, care au produsul un număr de o cifră și se pot scrie în fiecare caz câte 3 numere schimbând ordinea cifrelor: 1, 1, 2; ...; 1, 1, 9; 1, 2, 2 și 1, 3, 3. Deci $10 \cdot 3 = 30$ de numere. (iii) Există 2 grupe de câte trei cifre diferite 1, 2, 3 și 1, 2, 4 care au produsul un număr de o cifră și se pot scrie în fiecare caz câte 6 numere schimbând ordinea cifrelor, în total $6 \cdot 2 = 12$. Din (i), (ii) și (iii) rezultă că numărul numerelor „*superioare*” este $2 + 30 + 12 = 44$.

Problema 4. Un număr natural $\overline{abcd}$, cu cifre nenule, se numește „*special*” dacă $a \cdot c + b \cdot d$ este pătrat perfect.

a) Fie n un număr natural. Să se demonstreze că, dacă numerele $9 \cdot n + 1$ și $11 \cdot n + 1$, sunt simultan pătrate perfecte, atunci n este divizibil cu 5.

b) Să se determine cel mai mic număr natural care are următoarele proprietăți:

- i. Toate cifrele utilizate pentru scrierea numărului sunt numere prime.
- ii. Suma cifrelor numărului este egală cu 2020.
- iii. Numărul este un multiplu al lui 11.

Luminița Bucureșteanu, Călărași și Relu Ciupea, Oltenița

Soluție: a) Dacă pentru n un număr natural se notează cu $u(n)$ ultima cifră a lui n , atunci dacă $u(n)=1 \Rightarrow u(11n+1)=2$; dacă $u(n)=2 \Rightarrow u(11n+1)=3$; dacă $u(n)=3 \Rightarrow u(9n+1)=8$; dacă $u(n)=4 \Rightarrow u(9n+1)=7$; dacă $u(n)=6 \Rightarrow u(11n+1)=7$; dacă $u(n)=7 \Rightarrow u(11n+1)=8$; dacă $u(n)=8 \Rightarrow u(9n+1)=3$; dacă $u(n)=9 \Rightarrow u(9n+1)=2$, rezultă că cele două numere pot fi simultan pătrate perfecte, dacă $u(n)=0$ sau 5 , adică pentru n divizibil cu 5 . **b)** Pentru că $2020 = 288 \cdot 7 + 4$, rezultă ce cel mai mic număr cu proprietățile **i.** și **ii.** este numărul $a = 22 \underbrace{777 \dots 77}_{288 \text{ cifre}}$ și cum $a = 11 \cdot \underbrace{2070707 \dots 07}_{288 \text{ cifre}} \Rightarrow a : 11 \Rightarrow a$ este cel mai mic număr natural cu proprietățile **i.**, **ii.** și **iii.**

Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 4 punct, **b)** 3 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3. a)** 3 puncte, **b)** 4 puncte; **Problema 4. a)** 3 puncte, **b)** 4 puncte.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 1 FEBRUARIE 2020
Clasa a VI-a

Problema 1.

a) Determinați numerele naturale de trei cifre pentru care se obține restul de 2 când sunt împărțite la 6, restul de 5 când sunt împărțite la 9 și restul de 7 când sunt împărțite la 11?

b) Determinați cel mai mic număr de trei cifre care nu este un *palindrom*¹, dar care este suma a trei *palindromuri* distincte de ordinul zecilor.

Notă: Un *palindrom* este număr natural care are aceeași valoare atunci când este citit de la stânga la dreapta sau de la dreapta la stânga. (De exemplu numerele naturale 88, 121, 2002 etc. sunt *palindromuri*.)

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: a) Dacă n este un număr cu proprietățile din enunț atunci există numerele naturale c_1, c_2 și c_3 astfel încât $n = 6 \cdot c_1 + 2 = 9 \cdot c_2 + 5 = 11 \cdot c_3 + 7 \Rightarrow n + 4 = 6 \cdot (c_1 + 1) = 9 \cdot (c_2 + 1) = 11 \cdot (c_3 + 1)$, rezultă că $n + 4$ un multiplu comun al numerelor 6, 9 și 11, deci $n + 4 \in \{198, 396, 594, 792, 990\} \Leftrightarrow n \in \{194, 392, 590, 788, 986\}$. b)

Dacă x este numărul căutat, atunci există cifrele nenule a, b și c astfel încât $x = \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 11(a + b + c)$, deci x este un multiplu al lui 11. Numărul 110 nu este palindrom și este cel mai mic număr de trei cifre care este divizibil cu 11. Pentru că $110 = 11 + 33 + 66$, numărul căutat este 110.

Problema 2. Se consideră mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid (n+17):21\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid (n+35):3\}$ și $C = \{n \in \mathbb{N} \mid (n+32):6\}$, dacă $M = A \cap B \cap C$, atunci:

a) Demonstrați că $n \in M$ dacă și numai dacă $42 \mid (n+38)$.

b) Arătați că $2020 \in M$.

Luminița Bucureșteanu, Călărași

Soluție: a) $(\rightarrow) \forall x \in M \Rightarrow 21 \mid x+17$ și $21 \mid 21 \Rightarrow 21 \mid x+38$ (1); $3 \mid x+35$ și $3 \mid 3 \Rightarrow 3 \mid x+38$ (2); $6 \mid x+32$ și $6 \mid 6 \Rightarrow 6 \mid x+38$ (3). Din (1), (2), (3), (4) și $[21, 3, 6] = 42 \Rightarrow 42 \mid (x+38)$. $(\leftarrow) \forall x \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $42 \mid (x+38) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x = 42k - 38 \Rightarrow x + 17 = 21(2k - 1)$, $x + 35 = 3(14k - 1)$ și $x + 32 = 6(7k - 1) \Rightarrow x \in M$. b) Pentru că $2020 + 38 = 42 \cdot 49 \Rightarrow 2020 \in M$.

Problema 3. Fie AOB un unghi ascuțit. În semiplanul opus semiplanului determinat de dreapta OA și punctul B se consideră punctele C, D și E cu proprietățile $OC \perp OA$, $OD \perp OB$ și (OE bisectoarea unghiului AOD).

a) Dacă $m(\angle EOC)$ este cu 23° mai mare decât $m(\angle AOB)$, atunci arată că $m(\angle AOB)$ este cu 2° mai mică decât $m(\angle AOD)$.

b) Dacă (OD este bisectoarea unghiului EOC , atunci (OA este bisectoarea unghiului EOB).

Stelică Pană, Chirnogi

Soluție: a) Din $OC \perp OA$ și $OD \perp OB \Rightarrow$

$\angle COD \equiv \angle AOB$ (au același complement) (1)

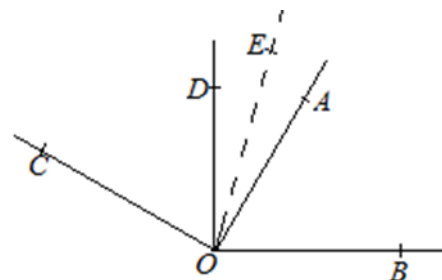
Cum OE este bisectoarea $\angle AOD \Rightarrow \angle DOE \equiv \angle AOE$ (2)

Din ipoteză, $\angle EOC = \angle AOB + 23^\circ$ (3) și cum

$\angle EOC \equiv (\angle DOE) + (\angle COD)$, atunci cf. (1) obținem

$\angle DOE = 23^\circ$.

Din (2), obținem $\angle DOE = \angle AOE = 23^\circ \Rightarrow \angle AOD = 46^\circ$



Din ipoteză, $OD \perp OB \Rightarrow \angle DOB = 90^\circ$. Cum $\angle AOB = (\angle DOB) - (\angle AOD)$, obținem $\angle AOB = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$.

b) Dacă OD bisectează unghiul $\angle EOC \Rightarrow \angle COD \equiv \angle EOD$ și cf (2) avem $\angle COD \equiv \angle AOE$ (4). Din (1) și (4) $\Rightarrow \angle AOB \equiv \angle AOE$, adică OA este bisectoarea unghiului $\angle EOB$.

Problema 4. Se consideră unghiul obtuz AOB , un punct C din exteriorul unghiului cu proprietate $OC \perp OA$ și bisectoarea (OD a unghiului BOC). Dacă (OE este opusă semidreptei (OD și $m(\angle AOE) = \frac{1}{4}m(\angle BOE)$) atunci:

a) Determinați $m(\angle AOB)$.

b) Arătați că semidreapta opusă semidreptei (OA este bisectoarea unghiului BOD).

Soluție: a) $m(\angle COD) = 90^\circ - m(\angle AOE)$

Din $m(\angle AOE) + m(\angle BOE) + 2 \cdot m(\angle COD) = 270^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot m(\angle AOE) + 180^\circ - 2 \cdot m(\angle AOE) = 270^\circ$

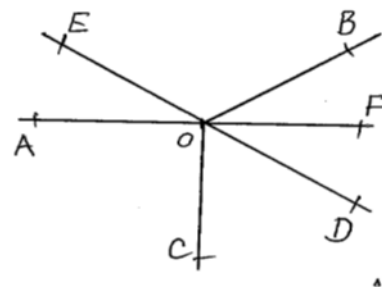
$\Rightarrow 3 \cdot m(\angle AOE) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle AOE) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle AOB) = 150^\circ$.

b) $m(\angle BOC) = 360^\circ - 90^\circ - 150^\circ = 120^\circ$

$m(\angle COD) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow m(\angle BOD) = 60^\circ$ Dacă (OF și

(OA sunt semidrepte opuse

$\Rightarrow m(\angle BOF) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Rightarrow (OF$ este bisectoarea unghiului BOD).



Sorin Furtună, Călărași

Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 4 puncte, **b)** 3 puncte; **Problema 2. a)** 5 puncte, **b)** 2 puncte; **Problema 3. a)** 4 puncte, **b)** 3 puncte; **Problema 4. a)** 4 puncte, **b)** 3 puncte.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 1 FEBRUARIE 2020
Clasa a VII-a

Problema 1. Determinați numerele raționale p și q astfel încât $p\sqrt{2020} + q = \sqrt{505}$.

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: a) $\sqrt{2020} = 2\sqrt{505}$ (1); $22^2 = 484 < 505 < 529 = 23^2 \Rightarrow \sqrt{505} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (2); $p\sqrt{2020} + q = \sqrt{505} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (2p-1)\sqrt{505} = -q$; Dacă presupunem $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow p\sqrt{2020} + q = \sqrt{505} \Leftrightarrow \sqrt{505} = -\frac{q}{2p-1} \Rightarrow \sqrt{505} \in \mathbb{Q}$,
 contradicție cu (2) $\Rightarrow p = \frac{1}{2}$ și $q = 0$.

Problema 2.

a) Arătați că $100 < \sqrt{100 \cdot 101} + \sqrt{100 \cdot 101} < 101$.

b) Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, demonstrați că $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $n = 3$.

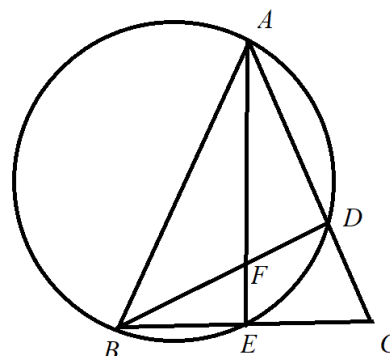
Stoianovici Gheorghe, Călărași

Soluție: a) Evident $0 < 100 + \sqrt{100 \cdot 101} \Rightarrow 100^2 < 100^2 + 100 + \sqrt{100 \cdot 101} \Rightarrow 100^2 < 100 \cdot 101 + \sqrt{100 \cdot 101} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 100 < \sqrt{100 \cdot 101} + \sqrt{100 \cdot 101}$ (1). Evident $100 < 101 \Rightarrow 100 \cdot 101 < 101^2 \Rightarrow \sqrt{100 \cdot 101} < 101 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sqrt{100 \cdot 101} < 101(101 - 100) \Rightarrow 100 \cdot 101 + \sqrt{100 \cdot 101} < 101^2 \Rightarrow \sqrt{100 \cdot 101} + \sqrt{100 \cdot 101} < 101$ (2); Din (1) și
 (2) rezultă că $100 < \sqrt{100 \cdot 101} + \sqrt{100 \cdot 101} < 101$. b) $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^n} = \sqrt{225} = 15 \in \mathbb{Q}$;
 $(\rightarrow) 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^n} \in \mathbb{N}$, e
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^n = 100 + 5^n = 25 \cdot (4 + 5^{n-2}) \Rightarrow \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{25 \cdot (4 + 5^{n-2})} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$,
 $k \geq 2$, astfel încât $4 + 5^{n-2} = k^2 \Leftrightarrow 5^{n-2} = (k-2) \cdot (k+2) \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, astfel încât $k-2 = 5^a$ și
 $k+2 = 5^b$. Presupunem $a \geq 1 \Rightarrow 5(5^{b-1} - 5^{a-1}) = 4 \Rightarrow 4:5$, contradicție, rezultă $a = 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow n = 3$.

Problema 3. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $m(\angle BAC) = 50^\circ$. Cercul cu diametrul AB intersectează latura AC în punctul D și latura BC în punctul E . Dacă intersecția dreptelor AE și BD este punctul F , atunci determinați $m(\angle AFB)$.

Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: a) $AB = AC$ și $m(\angle BAC) = 50^\circ \Rightarrow m(\angle ABC) = 65^\circ$ (1);
 $m(\angle ADB) = m(\angle AEB) = 90^\circ$ (2); Din (1) și (2) rezultă că
 $m(\angle BAE) = 25^\circ$ (3) și $m(\angle ABD) = 40^\circ$ (4). Pentru că suma
 măsurilor unghiurilor triunghiului ABF este 180° , din (3) și (4)
 rezultă că $m(\angle AFB) = 115^\circ$.



Problema 4. În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră punctele M și N cu proprietatea $m(\angle MAB) = m(\angle MBA) = m(\angle NBC) = m(\angle NCB) = 15^\circ$. Dacă $MN = a$ cm ($a > 0$), atunci:

- Demonstrați că patrulaterul $AMNC$ este trapez isoscel.
- Determinați perimetrul trapezului isoscel $AMNC$.

c) Arătați că $\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AMNC}$.

Furtună Sorin, Călărași și Stelică Pană, Chirnovi

Soluție: a) $\triangle MBN$ - echilateral deoarece din

$$\triangle AMB \equiv \triangle BNC (ULU) \Rightarrow BM = BN \quad m(\angle MBN) = 90^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 60^\circ.$$

$$AC \cap BD = \{O\} \quad [BO - \text{bis } \angle MBN \Rightarrow BO \perp MN \text{ și cum}$$

$$BO \perp AC \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow AMNC - \text{trapez isoscel.}$$

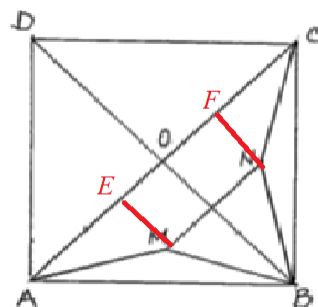
b) Ducem $ME \perp AC$ și $NF \perp AC$.

$$m(\angle MAE) = 30^\circ \Rightarrow ME = \frac{a}{2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ și, analog, } FC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow P_{AMNC} = a + a + a + a + a\sqrt{3} = a(4 + \sqrt{3}).$$

$$\text{c) } \mathcal{A}_{AMNC} = \frac{(AC + MN) \cdot ME}{2} = \frac{(a + a\sqrt{3} + a) \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2(\sqrt{3} + 2)}{4}; AC = a(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow$$

$$AB = \frac{a(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{2}}; \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{a^2(4 + 2\sqrt{3})}{2} = a^2(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AMNC}.$$



Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Barem de notare este: Problema 1. 7 puncte; **Problema 2. a)** 3 puncte, **b)** 4 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4. a)** 3 puncte, **b)** 2 puncte, **c)** 2 puncte.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 1 FEBRUARIE 2020
Clasa a VIII-a

Problema 1. Se consideră numerele reale x și y , demonstrați că $x^2 + 4y^2 = x + 2y + 4$ și $[y, x] \cap \mathbb{Z} = \{y, x\}$ dacă și numai dacă $x = 2$ și $y = 1$.

Relu Ciupea, Oltenița

Soluție: ($\leftarrow$) Se verifică că egalitățile $x^2 + 4y^2 = x + 2y + 4$ și $[y, x] \cap \mathbb{Z} = \{y, x\}$ sunt adevărate dacă $x = 2$ și $y = 1$. ($\rightarrow$) Deoarece $[y, x] \cap \mathbb{Z} = \{y, x\}$ rezultă că numerele y și x sunt întregi consecutive, deci $x = y + 1$.

Înlocuind în egalitatea din enunț se obține: $(y + 1)^2 + 4y^2 = y + 1 + 2y + 4 \Rightarrow 5y^2 - y - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y^2 - y - 4 = 0 \Rightarrow (y - 1)(5y + 4) = 0$, ceea ce conduce la: $y - 1 = 0$ sau $5y + 4 = 0$. Din

$5y + 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$. Rămâne doar $y - 1 = 0$, deci $y = 1$, de unde se obține $x = 2$.

Problema 2. Determinați toate numerele reale x pentru care $[\sqrt{x}]$, $2 \cdot [\sqrt{x}]$, $[2 \cdot \sqrt{x}]$ sunt numere întregi consecutive.

Notă: Pentru un număr real y se notează cu $[y]$ cel mai mare număr întreg care este mai mic sau egal cu y sau, altfel spus, dacă $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$ și $k \leq y < k + 1$ rezultă că $[y] = k$.

Gheorghe Fianu, Ștefan cel Mare

Soluție: Fie $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $[\sqrt{x}] = n$ (1), $2[\sqrt{x}] = n + 1$ (2) și $[2\sqrt{x}] = n + 2$ (3); din (1) și (2) rezultă că

$[\sqrt{x}] = 1$; (3) $\Leftrightarrow 3 \leq 2\sqrt{x} < 4$ și (1) $\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq x < 4$ și $1 \leq x < 4 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{9}{4}, 4\right)$. Dacă $\frac{9}{4} \leq x < 4$,

atunci $\frac{3}{2} \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow 2[x] = 2$. În concluzie $[\sqrt{x}]$, $2 \cdot [\sqrt{x}]$, $[2 \cdot \sqrt{x}]$ sunt numere întregi consecutive dacă și

numai dacă $x \in \left(\frac{9}{4}, 4\right)$.

Problema 3. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = a$ ($a > 0$). Punctul F este mijlocul lui segmentului CD , iar punctul E este situat segmentului BF astfel încât dreptele AE și BF sunt perpendiculare.

a) Demonstrați că triunghiul ADE este isoscel.

b) Determinați distanța de la punctul C la dreapta DE .

Luminița Bucureșteanu, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Soluție: a) a) Aplicând TP în $\triangle BFC$, avem $BF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Din asemănarea $\triangle AEB$ și $\triangle BFC$ dreptunghice (cazul UU) rezultă

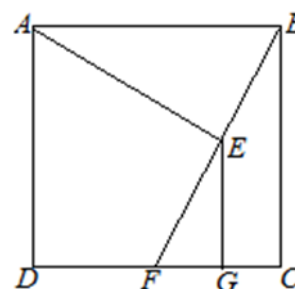
$$\frac{AB}{BF} = \frac{BE}{CF} = \frac{AE}{BC} \Rightarrow AE = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \text{ și } BE = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Duc } EG \perp FC \text{ (} G \in BC \text{)}; EF = BF - BE = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

Din asemănarea $\triangle FGE$ și $\triangle BFC$, obținem $\frac{EG}{BC} = \frac{FE}{FB} = \frac{FG}{FC}$, de unde

$$EG = \frac{3a}{5} \text{ și } FG = \frac{3a}{10}. \text{ În } \triangle DEG \left(DG = DF + FG = \frac{4a}{5} \right), \text{ avem cf TP:}$$

$$DE^2 = a^2 \Rightarrow DE = a = AD \Rightarrow \triangle ADE \text{ este isoscel.}$$

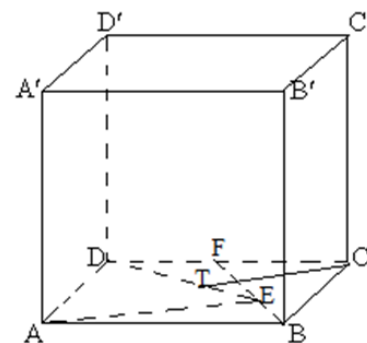


b) $CT \perp DE, (T \in DE)$;

$$\left. \begin{array}{l} C'C \perp (ABC) \\ CT \perp DE \\ DE \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow C'T \perp DE \Rightarrow d(C', DE) = C'T$$

$$CT = EG = \frac{3a}{5} \text{ (înălțimi corespunzătoare laturilor congruente în } \triangle DEC$$

isoscel). În $\triangle C'TC$ dreptunghic în $C \Rightarrow$ cf TP: $C'T = \frac{a\sqrt{34}}{5}$



3. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AB = 4a$, $CD < 4a$, $a > 0$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD , respectiv AD . Punctul $E \notin (ABC)$ și $AE \perp (ABC)$. Dacă $AE = a$, $[MP] \equiv [NQ]$ și $AC \cap BD = \{O\}$, atunci:

a) demonstrați că $EO \perp BD$;

b) determinați distanța de la punctul A la planul (EBD) .

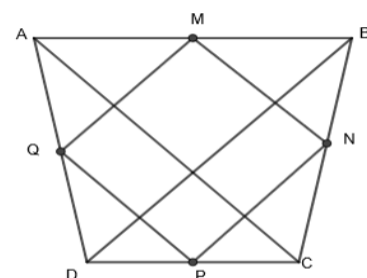
Problema 4. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AB = 4a$, $CD < 4a$, $a > 0$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD , respectiv AD . Punctul $E \notin (ABC)$ și $AE \perp (ABC)$. Dacă $AE = a$, $[MP] \equiv [NQ]$ și $AC \cap BD = \{O\}$, atunci:

a) demonstrați că $EO \perp BD$;

b) determinați distanța de la punctul A la planul (EBD) .

Soluție: a) Trapezul isoscel $ABCD$ are diagonalele $[AC] \equiv [BD]$. Cum MN, NP, PQ și QM sunt linii mijlocii în $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA$, respectiv $\triangle ADB$, patrulaterul $MNPQ$ este romb. Dacă $MP = NQ$, obținem $MNPQ$ pătrat. Unghiurile $\sphericalangle NMQ$ și $\sphericalangle AOB$ au laturile paralele, deci $\sphericalangle AOB$ este unghi drept. Dacă $EO \perp (ABC)$, $AO \perp BD$, $AO, BD \subset (ABC) \xRightarrow{T3 \perp} EO \perp BD$.

Gabriela Ruse, Călărași

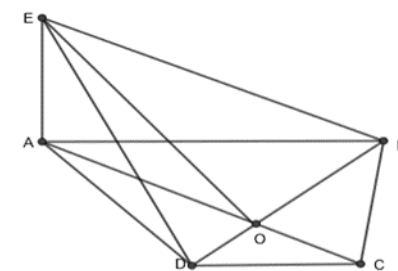


b) Cum $\triangle AOB$ este dreptunghic isoscel, $AB = 4a$, obținem

$$AO = 2a\sqrt{2}, \text{ iar din triunghiul dreptunghic } EAO, EO = \sqrt{a^2 + 8a^2} = 3a.$$

Ducem $AT \perp EO, T \in [EO]$, $EO \perp BD$, $AO \perp BD$, dreptele EO și $BD \subset (EBD)$

$$\xRightarrow{RT3 \perp} \Rightarrow AT \perp (EDB); AT = \frac{a \cdot 2a\sqrt{2}}{3a} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$



Probleme au fost selectate și prelucrate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. 7 puncte; Problema 2. 7 puncte; Problema 3. a) 4 puncte, b) 3 puncte; Problema 4. a) 4 puncte, b) 3 puncte.