

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 22.02.2019

Clasa a VI-a
Barem de corectare și notare

1. Media aritmetică a trei numere naturale nenule este 673. Unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două. Determinați numerele știind că două dintre acestea sunt divizori ai lui 2019.

Prof. Camelia Pîrvu

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{Fie } a < b < c \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} &= 673 \Rightarrow a+b+c = 2019 & 2p \\ \text{Cum } b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b &= a+c \Rightarrow b = 673 \\ D_{2019} = \{1, 3, 673, 2019\} \Rightarrow a \in \{1, 3\} &\text{ sau } c \in \{2019\} & 2p \\ a = 1, b = 673 \Rightarrow c &= 1345 & 1p \\ a = 3, b = 673 \Rightarrow c &= 1343 & 1p \\ c = 2019 &\text{ nu convine} & 1p \end{aligned}$$

2. Dacă m și n sunt numere naturale nenule astfel încât $5m+n$ este un divizor al lui $5n+m$, arătați că m este un divizor al lui n .

(Test Germania, 2015)

Soluție:

- $5n+m = k(5m+n), k \in \mathbb{N} \Rightarrow 5km - m = 5n - kn \Rightarrow m(5k-1) = n(5-k)$ 2p
- deoarece $m(5k-1) > 0$, avem că $n(5-k) > 0 \Rightarrow k \leq 4$ 1p
- dacă $k=1$, atunci $4m=4n \Rightarrow m=n$, deci $m|n$ 1p
- dacă $k=2$, atunci $9m=3n \Rightarrow 3m=n$, deci $m|n$ 1p
- dacă $k=3$, atunci $7m=n$, deci $m|n$ 1p
- dacă $k=4$, atunci $19m=n$, deci $m|n$ 1p

3. Se notează cu $[OC]$ bisectoarea unui unghi $\angle AOB$. Dacă $[OD]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOC$, $[OE]$ este bisectoarea unghiului $\angle BOD$, $[OF]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOE$, iar $m(\angle DOF) = 5^\circ$, calculați măsura unghiului $\angle AOB$.

Marius Șandru, Reșița, Supliment GM/decembrie 2017

Soluție: (Barem)

Notăm măsura unghiului $m(\angle AOB) = 8x$

$$m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = 4x \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle AOD) = m(\angle DOC) = 2x \dots\dots\dots 1p$$

$m(\angle BOD) = 6x$	1p
$m(\angle BOE) = m(\angle DOE) = 3x$	1p
$m(\angle AOF) = m(\angle FOE)$, adică $2x + 5 = 3x - 5$	1p
$x = 10^\circ$	1p
$m(\angle AOB) = 80^\circ$	1p

4. Fie cercurile secunare $\mathcal{C}_1(O_1, R_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, R_2)$ care se intersectează în punctele A și B .

a) Știind că $\sphericalangle AO_1B$ și $\sphericalangle AO_2B$ sunt suplementare și direct proporționale cu numerele 2 și 3, aflați măsurile celor două unghiuri;

b) Demonstrați că $O_1O_2 \perp AB$.

BAREM:

Unghiurile $2k, 3k$	1p
$5k = 180^\circ \Rightarrow k = 36^\circ$	2p
$m(\sphericalangle AO_1B) = 72^\circ, m(\sphericalangle AO_2B) = 108^\circ$	1p
$O_1A = O_1B = R_1 \Rightarrow O_1 \in [AB]$	1p
$O_2A = O_2B = R_2 \Rightarrow O_2 \in [AB]$	1p
O_1O_2 mediatoarea $[AB] \Rightarrow O_1O_2 \perp AB$	1p