

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-22 FEBRUARIE 2020
Clasa a XI-a

SUBIECTUL I:

a) Demonstrați că nu există nici o matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, pentru care inversa lui X să fie egală cu $I_3 - X$.

b) Se consideră matricele $X(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ și mulțimea $H = \{X(2^k) | k \in \mathbb{N}^*\}$. Să se

determine valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$, știind că matricea $X(2020)$ se poate scrie ca un produs de n matrice distincte din mulțimea H .

SUBIECTUL II:

Există matricele distincte $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică sistemul $\begin{cases} X(X+Y)X = I_2 \\ Y(X+Y)Y = I_2 \end{cases}$?

SUBIECTUL III:

Determinați $r \in \mathbb{R}$, știind că limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{2n+1}{n+1} \right)$ este finită și nenulă.

SUBIECTUL IV:

Se consideră $x_0 \in (2, \infty)$ și șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ dat de relația $x_n = x_{n+1}^2 - 4x_{n+1} + 6$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n(x_n - 3)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.