

S.S.M.R - FILIALA MUREȘ
Olimpiada de matematică
Faza locală 16.02.2019
Clasa a VI-a
Barem de evaluare

SUBIECTUL I

- a) Se consideră numerele naturale a, b, c astfel încât $\frac{a}{a+2} = \frac{b}{b+3} = \frac{c}{c+4}$. Calculați $5a - 2b - c$

Soluție

$$\frac{a}{a+2} = \frac{b}{b+3} = \frac{c}{c+4} \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \\ c = 4k \end{cases} \quad 3p$$

$$\text{Atunci } 5a - 2b - c = 5 \cdot 2k - 2 \cdot 3k - 4k = 0 \quad 1p$$

- b) Arătați că dacă numerele naturale nenule x, y, z sunt invers proporționale cu numerele $y+z, z+x$, respectiv $x+y$, atunci $x = y = z$.

Soluție

$$x \cdot (y+z) = y \cdot (z+x) = z \cdot (x+y) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + xz = yz + xy \\ yz + xy = xz + yz \\ xz + yz = xy + xz \end{cases} \quad 2p$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xz = yz \\ xy = xz \\ yz = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \quad 1p$$

SUBIECTUL II

- a) Arătați că $15 \mid (10^n - 385)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$

- b) Suma a trei numere naturale este 2013. Împărțind al treilea număr la suma primelor două numere, se obține câtul 20 și restul 18. Dacă cel mai mare divizor comun al primelor două este 19, determinați cele trei numere.

Soluție

a) $10^n - 385 : 5$ și $10^n - 385 : 3$ 1p

$10^n - 385 = 99 \dots 9615$ (n cifre).....1p

Suma cifrelor este $9 \cdot (n-3) + 12 = 3 \cdot (3n-5)$ deci numărul este divizibil cu 3 și 5.....1p

b) $a + b + c = 2013$, $c = (a + b) \cdot 20 + 18$, $a + b > 18$1p

$20 \cdot (a + b) + 18 = 2013 - (a + b) \Leftrightarrow a + b = 95$1p

Obținem $19x + 19y = 95$, $(x, y) = 1$ deci vom avea două soluții

$(a, b, c) = (19, 76, 1918)$ și $(a, b, c) = (38, 57, 1918)$2p

SUBIECTUL III Se notează cu $[OC]$ bisectoarea unghiului $\angle AOB$. Dacă $[OD]$ este bisectoarea $\angle AOC$, $[OE]$ este bisectoarea unghiului $\angle BOD$, $[OF]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOE$, iar $m(\angle DOF) = 5^\circ$, găsiți măsura unghiului $\angle AOB$.

Gazeta Matematică

Soluție

Notăm $m(\angle AOB) = x$. Atunci: $m(\angle BOC) = m(\angle AOC) = \frac{x}{2}$ (1p)

Totodată, $m(\angle AOD) = m(\angle COD) = \frac{x}{4}$.

Avem că $m(\angle BOD) = m(\angle AOB) -$

$m(\angle AOD) = x - \frac{x}{4} =$

$\frac{3x}{4}$ (2p)

Deci: $m(\angle BOE) = m(\angle DOE) = \frac{3x}{8}$.

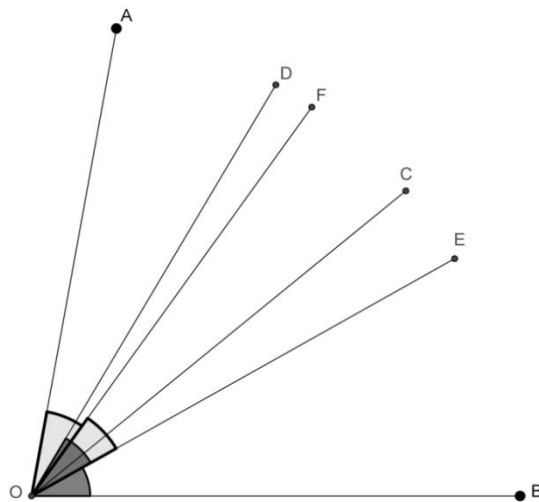
Atunci: $m(\angle AOE) = m(\angle AOB) -$

$m(\angle BOE) = x - \frac{3x}{8} =$

$\frac{5x}{8}$ (2p)

Așadar: $m(\angle AOF) = m(\angle EOF) =$

$\frac{5x}{16}$ (1p)



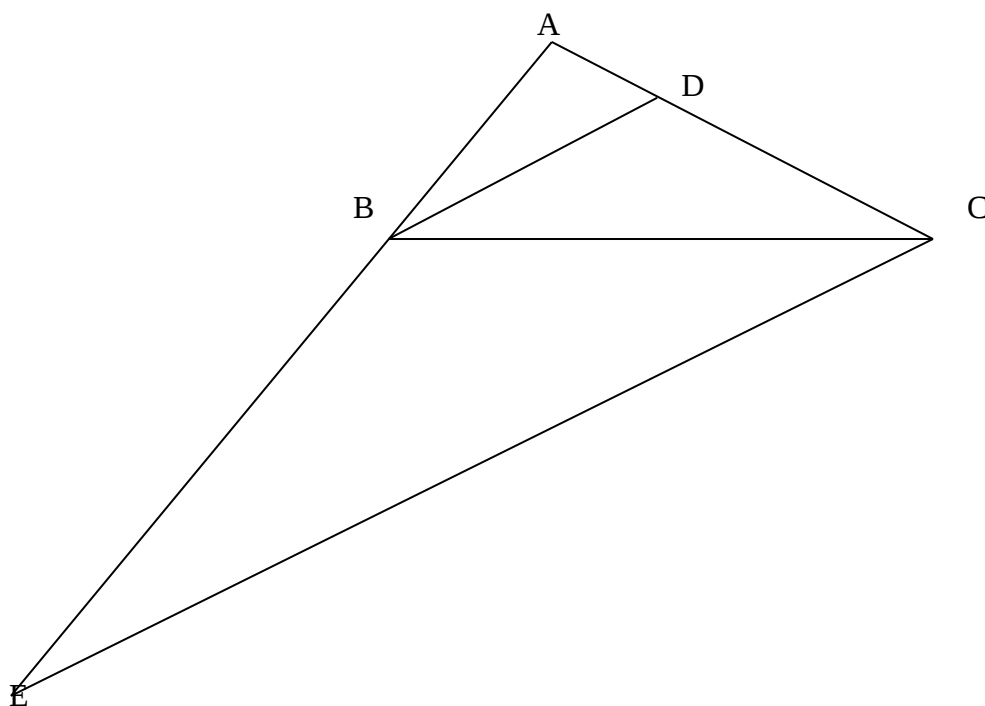
În concluzie,

$m(\angle DOF) = m(\angle AOF) - m(\angle AOD) = \frac{5x}{16} - \frac{x}{4} = \frac{x}{16} = 5^\circ \Rightarrow x = 16 \cdot 5^\circ = 80^\circ$ (1p)

SUBIECTUL IV

În triunghiul ABC se știe că măsurile unghiurilor $\angle A$ și $\angle B$ sunt proportionale cu numerele 2 și 3, iar măsurile unghiurilor $\angle B$ și $\angle C$ sunt invers proportionale cu numerele 0,1(6) și 0,2. Construim semidreapta (BD interioară unghiului $\angle ABC$ așa încât măsura unghiului $\angle ABD$ să fie egală cu 12° .

- Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC;
- Construim prin punctul C o dreaptă paralelă cu dreapta BD care intersectează dreapta AB în punctul E. Demonstrați că semidreapta (CB este bisectoarea unghiului $\angle ACE$.

Soluție

- Notăm cu a , b , c măsurile unghiurilor $\angle A$, $\angle B$ și $\angle C$. Atunci: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ și $b \cdot 0,1(6) = c \cdot 0,2$.

Deducem că: $a = \frac{2b}{3}$ și $c = \frac{5b}{6}$.

1 punct

Știm că: $a + b + c = 180^\circ$ și utilizând relațiile de mai sus deducem că:

$$a = 48^\circ, b = 72^\circ, c = 60^\circ$$

2 puncte

- Cum măsura unghiului $\angle ABD$ este de 12° prin diferență deducem că măsura unghiului $\angle DBC$ este de 60° .

1 punct

Considerăm dreptele paralele CD și BE cu secanta BC. Deducem că:

$$m(\angle CBD) = m(\angle BCE) = 60^\circ \text{ (unghiuri alterne interne).}$$

2 puncte

Cum și $m(\angle ACB)$ este tot 60° , atunci (CB este bisectoarea unghiului $\angle ABE$.

1 punct

S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică

Faza locală 16.02.2019

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

SUBIECTUL I

Fie numerele $a = \frac{1}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \dots + \frac{70}{441} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{63} \right)$ și
 $b = \sqrt{1} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7+9} + \dots + \sqrt{1+3+5+\dots+2017}$.

Arătați că numerele a și b sunt numere naturale pătrate perfecte.

Barem:

$$a) \quad a = \frac{1}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \dots + \frac{70}{441} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{63} \right) \quad 1p$$

$$a = \frac{1}{7} + \frac{2}{14} + \frac{3}{21} + \dots + \frac{63}{441}$$

$$a = \underbrace{\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{7}}_{63 \text{ ori}} = \frac{63}{7} = 9 = 3^2 \quad 1p$$

$$b) \quad \text{Fie } S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$$

$$S_n = 1 + (1 + 2) + (1 + 4) + \dots + (1 + 2n)$$

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2n}_{(n+1) \text{ ori}}$$

$$S_n = (n + 1) + 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$S_n = (n + 1) + n(n + 1)$$

$$S_n = (n + 1)^2 \quad 2p$$

$$2n + 1 = 2017 \Rightarrow n = 1008 \quad 1p$$

$$b = 1 + \sqrt{3^2} + \sqrt{5^2} + \dots + \sqrt{1009^2} = 1 + 3 + 5 + \dots + 1009 \quad 1p$$

$$2n + 1 = 1009 \Rightarrow n = 504$$

$$\Rightarrow b = 505^2 \quad 1p$$

SUBIECTUL II

a) Determinați toate perechile de numere întregi (a, b) știind că are loc următoarea egalitate: $(2019a - 2018b - 1)\sqrt{2018} = (1 - 2020a + 2019b)\sqrt{2019}$.

b) Fie numărul $a = \overline{1234567891011121314 \dots 2019}$, obținut prin alăturarea cifrelor numerelor 1, 2, 3, 4, ..., 2019. Determinați cea de a patra cifră a numărului $\sqrt{a}$.

Barem:

a) Deoarece $\sqrt{2018}, \sqrt{2019}$ iraționale și a, b întregi $\Rightarrow$ egalitatea poate avea loc $\Leftrightarrow$
 $2019a - 2018b - 1 = 0$ și $1 - 2020a + 2019b = 0$ 2p

Adunând cele două relații de egalitate obținem $-a + b = 0$ sau $a = b$ 1p

Înlocuind $a = b$ în una din cele două relații obținem $a = b = 1$ soluție unică 1p

b) Numărul a are $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 1020$, adică un număr impar de cifre 1p

Aplicăm algoritmul de extragere al rădăcinii pătrate și obținem:

$$\sqrt{1'23'45'67' \dots} = 1111 \dots$$

$\Rightarrow$ cifra căutată este 1

1p

1p

SUBIECTUL III

În triunghiul ABC fie $M \in BC$ astfel încât $MC = 4BM$ și P mijlocul laturii BC . Fie $Q \in AC$ astfel încât $\widehat{BAC} \equiv \widehat{PQC}$ și $\{R\} = AM \cap PQ$. Determină valoarea raportului $\frac{AB}{QR}$.

Prof. Vass Noémi, Reghin

Barem:

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{PQC} \Rightarrow AB \parallel PQ \text{ și } BP = PC \Rightarrow PQ \text{ linie mijlocie în triunghiul } ABC \Rightarrow PQ = \frac{AB}{2} \quad 2p$$

$$PR \parallel AB \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle RMP \Rightarrow \frac{AB}{PR} = \frac{BM}{MP} \quad 1p$$

$$\text{Fie } BC = x \Rightarrow BM = \frac{x}{5} \text{ și } MP = \frac{x}{2} - \frac{x}{5} = \frac{3x}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PR} = \frac{BM}{MP} = \frac{2}{3} \Rightarrow PR = \frac{3}{2}AB \quad 2p$$

$$QR = PQ + PR = 2AB \Rightarrow \frac{AB}{QR} = \frac{1}{2}. \quad 2p$$

SUBIECTUL IV

Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$ și $AC \perp BD$. Dacă N este un punct oarecare pe segmentul OC , unde $\{O\} = AC \cap BD$ și P este intersecția perpendicularei din C pe DN cu dreapta BD , arătați că $NB \perp AP$.

Gazeta matematică – 2018

Barem:

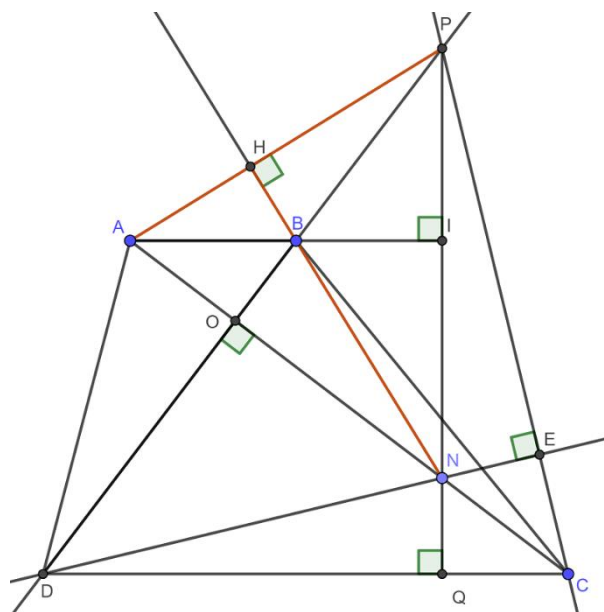
$$\left. \begin{array}{l} DN \perp CP \text{ (ip.)} \\ CO \perp DP \text{ (ip.)} \end{array} \right\} \Rightarrow N \text{ ortocentru în } \triangle CDP \quad 2p$$

$$\Rightarrow PN \perp CD \quad (1) \quad 1p$$

$$AB \parallel CD \stackrel{(1)}{\Rightarrow} AB \perp PN \quad (2) \quad 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} PO \perp AN \text{ (ip.)} \\ AB \perp PN \text{ (2)} \end{array} \right\} \Rightarrow B \text{ ortocentru în } \triangle ANP \quad 2p$$

$$\Rightarrow NB \perp AP \quad 1p$$



S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică
Faza locală 16.02.2019
Clasa a VIII-a
Barem

SUBIECTUL I

Se dă numărul $A = 4 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{2019} \underbrace{555 \dots 5}_{2019} + 4$, unde cifra 1 se repeta de 2019 ori, iar cifra 5 tot de 2019 ori. Calculați $\sqrt{A}$ (G. M. Enunt modificat)

Soluție:

Notăm $\underbrace{111 \dots 1}_{\text{de 2019 ori}} = a$

$$A = 4 \cdot [a \cdot 10^{2019} + 5 \cdot a + 1] \dots \dots \dots 3p$$

$$A = 4 \cdot [a \cdot (9 \cdot a + 1) + 5 \cdot a + 1] = 4 \cdot [9a^2 + 6a + 1] = 4 \cdot (3a + 1)^2 \dots \dots \dots 2p$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{4 \cdot (3a + 1)^2} = |2(3a + 1)| = \underbrace{666 \dots 68}_{2018} \dots \dots \dots 2p$$

SUBIECTUL II

a) Dacă $S = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4037+2\sqrt{2018 \cdot 2019}}}$, calculați [S],

unde [S] reprezintă partea întreagă a numărului S;

b) Fie x, y numere reale cu proprietatea că, $x^2 + 4y^2 - 4x\sqrt{2} + 4y + 8 = 0$. Arătați că, suma $x+2y$ este un număr din intervalul (-1, 4).

(prof. Gînta Vasile)

Soluție:

$$a) \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1, \dots, \sqrt{4037+2\sqrt{2018 \cdot 2019}} = \sqrt{2019} + \sqrt{2018} \quad \mathbf{1 \text{ punct}}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2018}}, \text{ iar după rationalizare } S = \sqrt{2019} - 1. \quad \mathbf{1 \text{ punct}}$$

În final, [S] = 43.

$$b) \text{ Relația dată devine: } (x - 2\sqrt{2})^2 + (2y + 1)^2 = 1 \quad \mathbf{1 \text{ punct}}$$

Deducem că, $|x - 2\sqrt{2}| \leq 1$ și $|2y + 1| \leq 1$ ceea ce este echivalent cu:

$$-1 \leq x - 2\sqrt{2} \leq 1 \text{ și } -1 \leq 2y + 1 \leq 1 \quad \mathbf{2 \text{ punct}}$$

În final, după argumentații logico-matematice se ajunge la faptul că:

$$2\sqrt{2} - 3 \leq x + 2y \leq 1 + 2\sqrt{2} \text{ adică, suma } x+2y \text{ este un număr din intervalul } (-1, 4). \quad \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

SUBIECTUL III

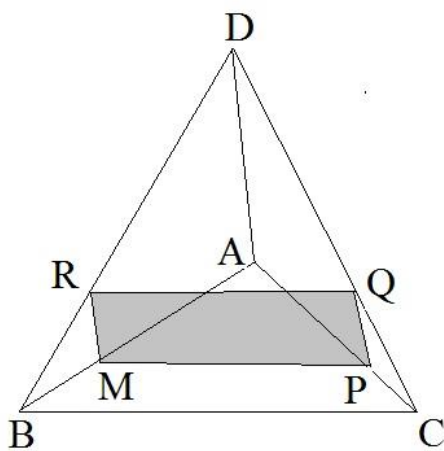
Fie A, B, C, D puncte necoplanare și $M \in AB$. Prin punctul M se duce un plan paralel cu dreptele AD și BC care intersectează segmentele (AC) , (DC) , (BD) în punctele P, Q, R .

a) Determinați natura patrulaterului $MPQR$.

b) Determinați poziția punctului M , astfel încât aria patrulaterului $MPQR$ să fie maximă.

(Matlap)

Soluție:



$$a) BC \parallel (MPQR), (MPQR) \cap (ABC) = MP \Rightarrow BC \parallel MP (1)$$

$$BC \parallel (MPQR), (MPQR) \cap (BCD) = RQ \Rightarrow BC \parallel RQ (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow MP \parallel RQ (*) \dots\dots\dots 2p$$

Analog,

$$AD \parallel (MPQR), (MPQR) \cap (ACD) = PQ \Rightarrow AD \parallel PQ (3)$$

$$AD \parallel (MPQR), (MPQR) \cap (ABD) = MR \Rightarrow AD \parallel MR (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow PQ \parallel MR (**)$$

Din $(*)$, $(**)$ rezultă că $MPQR$ este un paralelogram.....2p

b) $MR \parallel AD$, $MP \parallel BC$, deci $m(\angle(MR, MP)) = m(\angle(AD, BC))$, adică $m(\angle PMR) = \text{constant}$.

Dacă $MB = k \cdot AB$ atunci prin $\triangle AMP \sim \triangle ABC$ și $\triangle BMR \sim \triangle BAD$ obținem

$$MR = k \cdot AD, MP = (1-k) \cdot BC \dots\dots\dots 1p$$

Deci $A_{MPQR} = MP \cdot MR \cdot \sin(PMR) = k(1-k) \cdot AD \cdot BC \cdot \sin(PMR)$ este maximă, dacă $k(1-k)$ este maximă.....1p

$$\text{Astfel } k(1-k) = k - k^2 = \frac{1}{4} + k - k^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - k\right)^2 \text{ este maximă dacă } k = \frac{1}{2}.$$

Obținem că $MA = MB$, deci M este punctul de mijloc a segmentului $[AB]$1p

SUBIECTUL IV

Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$ și $P, Q \in (VO)$.

Dacă $\{E\} = AP \cap CV$, $\{F\} = CP \cap AV$, $\{S\} = BQ \cap DV$ și $\{T\} = DQ \cap BV$, arătați că măsura unghiului dintre dreptele EF și ST nu depinde de alegerea punctelor P și Q pe segmentul VO.

Gazeta matematică 2014

Soluție:

În triunghiul VAC avem ca

$$AE \cap CF \cap VO = \{P\} \Rightarrow \frac{VF}{FA} \cdot \frac{AO}{OC} \cdot \frac{CE}{VE} = 1 \quad (\text{Am aplicat teorema Ceva}). \quad (2p)$$

Cum $AO = CO$, deducem ca $\frac{VF}{FA} = \frac{VE}{CE}$. Din această relație conform reciproci teoremei lui Thales

deducem ca $FE \parallel AC$ (1). (2p)

Cum $BD \perp AC$ și $AC \perp VO \Rightarrow AC \perp (VBD) \Rightarrow AC \perp ST$ (2). (2p)

Din relațiile (1) și (2) deducem ca $FE \perp ST$ și deci $m[\angle(EF, ST)] = 90^\circ$. (1p)