

Barem de corectare CMAA a XII-a Filiera tehnologică 2017

1. a) $\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \dots (2p)$
 $= e - e + 1 = 1 \dots (2p)$

b) $I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx \dots (1p)$

$I_n = x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx \dots (1p)$

$I_n = e - (n+1) I_{n-1} \Rightarrow I_n + (n+1) I_{n-1} = e \dots (1p)$

2. a) Funcția este continuă în $x=0 \dots (1p)$

Pentru $x < 1, x > 1$ f este continuă $\Rightarrow f$ este continuă pe $R \Rightarrow f$ admite primitive pe $R \dots (1p)$

b) Pentru $x < 1$ avem $\int (x^2 + x - 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + c_1 \dots (1p)$

Pentru $x > 1$ avem $\int (4x - 3) dx = 2x^2 - 3x + c_2 \dots (1p)$

F admite primitive pe $R \Rightarrow F$ derivabilă pe $R \Rightarrow F$ continuă pe $R \dots (1p)$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + c, & x \leq 1 \\ 2x^2 - 3x + \frac{5}{6} + c, & x > 1 \end{cases} \dots (1p)$$

Din condiția $F(2) = 0$ avem $c = -\frac{17}{6}$ de unde $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - \frac{17}{6}, & x \leq 1 \\ 2x^2 - 3x - 2, & x > 1 \end{cases} \dots (1p)$

3. a) Pentru $x, y \in M$ avem

$x \circ y = 3 + (x - 3)^{\lg(y-3)} = 3 + (10^{\lg(x-3)})^{\lg(y-3)} = 3 + 10^{\lg(x-3)\lg(y-3)} = 3 + (10^{\lg(y-3)})^{\lg(x-3)} = y \circ x \dots (2p)$

b) Operația fiind comutativă, $e > 3$ este element neutru dacă pentru orice $x \in M, x \circ e = x \dots (1p)$

$3 + (x - 3)^{\lg(e-3)} = x \Leftrightarrow (x - 3)^{\lg(e-3)} = x - 3 \Leftrightarrow 10^{\lg(x-3)\lg(e-3)} = 10^{\lg(x-3)} \dots (2p)$

Din injectivitatea funcției exponențiale și x oarecare avem: $\lg(e - 3) = 1 \Rightarrow e = 13 \in M \dots (2p)$
 SAU

Pentru $x \in M$ avem $13 \circ x = 3 + 10^{\lg(x-3)} = 3 + x - 3 = x$, deci 13 este element neutru al operației $\dots (5p)$

4. a) $A, B \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 2d \\ d & c \end{pmatrix} \dots (1p)$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 2d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 2bd & 2(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 2bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \quad x = ac + 2bd, y = ad + bc \dots (1p)$

$x^2 - 2y^2 = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = (a^2 - 2b^2) \cdot (c^2 - 2d^2) = 1$ de unde $A, B \in G \dots (1p)$

b) Pentru $x = 1, y = 0$ avem $A = I_2, 1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1 \Rightarrow I_2 \in G$, deci este elementul neutru al operației date $\dots (1p)$

Deoarece pentru $A \in G, \det A = x^2 - 2y^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă $\dots (1p)$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} x & -2y \\ -y & x \end{pmatrix}, x^2 + 2(-y)^2 = x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow A^{-1} \in G \dots\dots\dots (2p)$$