

# Olimpiada Națională de Matematică - Etapa locală

## Clasa a XII – a

### VARIANTA 1

#### BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

1. Considerăm intervalul  $G = [n-1, n+1]$  și legea de compoziție

$$x * y = x \cdot y - n \cdot (x + y) + n^2 + n \dots\dots\dots 3p$$

Verificăm că  $G$  este parte stabilă relativ la această lege de compoziție :  $n-1 \leq x * y \leq n+1 \Leftrightarrow$

$$(x-n) \cdot (y-n) \in [-1, 1], \text{ care este evident adevărat, } \forall x, y \in [n-1, n+1] \dots\dots\dots 2p$$

Cum  $G$  este parte stabilă, rezultă că și  $(a * b) * c \in [n-1, n+1]$ , de unde se obține dubla inegalitate. .... 2p

2. a) Aplicăm legea pentru  $q \circ e = q \Rightarrow f(f^{-1}(q) + f^{-1}(e) - q) = q$ , de unde

$$\text{compunând cu } f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(e) = f^{-1}(2) \Rightarrow e = 2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{și } a \circ a^{-1} = 2 \Rightarrow f(f^{-1}(a) + f^{-1}(a^{-1}) - q) = 2 \Rightarrow a^{-1} = f(2q - f^{-1}(a)) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{b) } f(q) = q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{2} \text{ Se calculează } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Se ajunge la ecuația : } \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0 \text{ notăm } \sqrt[3]{x} = t \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow t_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 8 \quad \text{și} \quad t = -3 \Rightarrow x_2 = -27. \text{ Așadar există funcții cu proprietatea din enunț. .... 1p}$$

3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x + \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{x \sin x + \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{x^2 + \cos^2 x}{\cos^2 x}} dx = \dots\dots\dots 2p$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\frac{x}{\cos x}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{\cos x}\right)^2} dx = \dots\dots\dots 3p$$

$$= \arctg \left( \frac{x}{\cos x} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \arctg \left( \frac{2\pi}{3} \right) \dots\dots\dots 2p$$

4.

$$\text{Fie } J = \int \cos x \sqrt{a + \sin 2x} dx. \text{ Atunci } I + J = \int (\sin x + \cos x) \sqrt{a + \sin 2x} dx = \int (\sin x - \cos x)' \sqrt{a + 1 - (1 - \sin 2x)} dx = \int (\sin x - \cos x)' \sqrt{a + 1 - (\sin x - \cos x)^2} dx (2p).$$

$$\text{Notăm } A = \sqrt{a + 1 - t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 A &= t\sqrt{a+1-t^2} - \int \frac{-t}{\sqrt{a+1-t^2}} dt = t\sqrt{a+1-t^2} \\
 &- \int \frac{a+1-t^2-(a+1)}{\sqrt{a+1-t^2}} dt = t\sqrt{a+1-t^2} - A + (a+1)\arcsin \frac{t}{\sqrt{a+1}} \Rightarrow A \\
 &= \frac{t\sqrt{a+1-t^2}}{2} + \frac{a+1}{2} \arcsin \frac{t}{\sqrt{a+1}} + C
 \end{aligned}$$

Pentru  $t = \sin x - \cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow I + J = \frac{(\sin x - \cos x)\sqrt{a + \sin 2x}}{2} + \frac{a+1}{2} \cdot \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{a+1}} + C(1)(1p)$$

$$\begin{aligned}
 J - I &= \int (\cos x - \sin x)\sqrt{a + \sin 2x} dx = \int (\sin x + \cos x)' \cdot \sqrt{a - 1 + 1 + \sin 2x} dx \\
 &= \int (\sin x + \cos x)' \cdot \sqrt{a - 1 + (\sin x + \cos x)^2} dx (2p).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Notam } B \int \sqrt{a-1+t^2} dt \quad B &= t\sqrt{t^2+a-1} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+a-1}} dt \\
 &= t\sqrt{t^2+a-1} - \int \frac{t^2+a-1-(a-1)}{\sqrt{t^2+a-1}} dt \\
 &= t\sqrt{t^2+a-1} - B + (a-1)\ln(t + \sqrt{t^2+a-1}) \Rightarrow B \\
 &= \frac{t\sqrt{t^2+a-1}}{2} + \frac{a-1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2+a-1}) + C
 \end{aligned}$$

Pentru  $t = \sin x + \cos x \Rightarrow J - I$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)\sqrt{a + \sin 2x}}{2} + \frac{a-1}{2} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{a + \sin 2x}) + C(1p)(2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Atunci din (1) și (2)} \Rightarrow I &= \frac{1}{2}(I + J - (J - I)) \\
 &= \frac{-\cos x \sqrt{a + \sin 2x}}{2} + \frac{a+1}{4} \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{a+1}} \\
 &- \frac{a-1}{4} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{a + \sin 2x}) + C(1p)
 \end{aligned}$$

### Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Se acordă numai punctaje întregi.