

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 17 FEBRUARIE 2018

CLASA a XI -a

SUBIECTE :

1. În $M_3(\square)$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a) Demonstrați că $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$.
 - b) Calculați $2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2018A^{2017}$.
 - c) Calculați $(I_3 + A)^n$, $n \in \square^*$.
2. Fie matricele $A, B, C \in M_n(\square)$ astfel încât $BA + BC + AC = I_n$ și $\det(A + B) = 0$.
Să se demonstreze că $\det(A + B + C - BAC) = 0$.
3. Fie $a \in (0, 1)$ și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 \geq 0$ și $x_{n+1} = ax_n e^{-x_n}$, $n \geq 0$. Să se calculeze
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln(n+1).$$
4. Să se studieze natura șirului $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_0 = 5^{-1}$, $x_1 = -\frac{5}{4}$, $x_{n+2} = \frac{5x_n x_{n+1}}{2x_{n+1} - 3x_n}$.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 0 - 7 puncte
Timpul de lucru : 3 ore