OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

16 februarie 2013

CLASA a VIII – a

1. Să se demonstreze că dacă x –7y + 3 = 0 şi $x \in [-3;4]$ atunci:
$E(x, y) = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = 5\sqrt{2}$.

2. a) Demonstraţi inegalitatea $\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$, pentru orice numere reale pozitive x, y.

b) Deduceţi că: $\frac{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{y^2 + yz + z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{z^2 + zx + x^2}}{zx} \geq \sqrt{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$, oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z.

3. Pe planul dreptunghiului ABCD se ridică perpendiculara PD, P $\notin$(ABC).

Dacă AM $\perp$PB, CN $\perp$PB (M, N $\in$PB), MN = 3 cm, AB = 8 cm, BC = 4 cm, calculaţi:

a) lungimea segmentului (PB);

b) tangenta măsurii unghiului planelor (ABC) şi (APC).

4. Fie triunghiul ABC cu laturile de lungimi x, y, z, ce verifică simultan relaţiile:
$x^2+y^2 \leq \frac{2}{x}, y^2+z^2 \leq \frac{2}{y}, z^2+x^2 \leq \frac{2}{z}, xyz = 1$. Pe planul lui se ridică perpendicularele AM = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ şi BN = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Arătaţi că ΔABC este echilateral.
b) Dacă x = 1 calculaţi: i) măsura unghiului dintre MB şi NC;
ii) valoarea tangentei unghiului dintre CN şi planul (ABM).

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.