

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 23 februarie 2018

CLASA a V-a

SOLUȚII ȘI BAREM

1.	a) Aflați numărul natural x din egalitatea: $34^2 - 3^2 + \{2018^0 + 2^3 + 7^1 \cdot [5^3 - 2^2 \cdot (10^3 + 3^2) : x]\} = 2017 \cdot 2018 - 2017^2.$	
	b) Determinați ultima cifră a numărului $A = 2018^{n^2} + 2019^{n^2+n} + 2020^n$, unde n este număr natural nenul.	
	a) $1156 - 9 + \{1 + 8 + 7 \cdot [125 - 4 \cdot (1000 + 9) : x]\} = 2017 \cdot (2018 - 2017)$ $1147 + [9 + 7 \cdot (125 - 4 \cdot 1009 : x)] = 2017$	1p
	$7 \cdot (125 - 4036 : x) = 861$ $125 - 4036 : x = 123$	1p
	$4036 : x = 2$ $x = 2018$	1p
	b) $u(2020^n) = 0$, oricare ar fi n număr natural nenul. $n^2 + n = n \cdot (n+1) = \text{par}$, oricare ar fi n număr natural nenul.	1p
	$u(2019^{n^2+n}) = u(2019^{\text{par}}) = u(9^2) = 1$	1p
	Un pătrat perfect poate fi doar de forma $4k$ sau $4k+1$, $k \in \mathbb{N}$. $u(2018^{4k}) = u(2018^4) = u(8^4) = 6$ $u(2018^{4k+1}) = u(2018^1) = u(8^1) = 8$	1p
2.	Cazul I: dacă $n = \text{par} \Rightarrow u(A) = u(6+1+0) = 7$ Cazul II: dacă $n = \text{impar} \Rightarrow u(A) = u(8+1+0) = 9$	1p
	a) Într-un parc de distracții se află bile albe, roșii, galbene și verzi. Determinați câte bile sunt de fiecare culoare, știind că 2019 nu sunt albe, 2018 nu sunt roșii, 2017 nu sunt galbene, iar 2016 nu sunt verzi.	
	b) Fie $S = 15 + 15^2 + 15^3 + \dots + 15^{1515}$. Determinați ultimele două cifre ale lui S.	
	Notăm cu a = numărul bilelor albe, r = numărul bilelor roșii, g = numărul bilelor galbene, v = numărul bilelor verzi. $r + g + v = 2019$ $a + g + v = 2018$ $a + r + v = 2017$ $a + r + g = 2016$	1p
	Prin însumarea celor 4 relații obținem: $3(a + g + r + v) = 8070$, adică $a + g + r + v = 2690$	1p
	Obține soluția: $a = 671$, $r = 672$, $g = 673$, $v = 674$	1p

	b) $S = 15 + 15^2 \cdot (1+15) + 15^4 \cdot (1+15) + \dots + 15^{1514} \cdot (1+15)$	1p
	$S = 15 + 16 \cdot 15^2 \cdot (1 + 15^2 + \dots + 15^{1512})$	1p
	Ultimele două cifre ale lui $16 \cdot 15^2$ sunt 00	1p
	Rezultă că ultimele două cifre ale lui S sunt 15.	1p
	OBS: Dacă elevul determină corect ultima cifră a numărului S se acordă 2p din 4p	
3.	a) <i>Arătați că suma $S = 2 + 9 + 16 + 23 + \dots + 2018$ este divizibilă cu 10.</i>	
	a) <i>Suma a 12 numere naturale distincte este 88. Arătați că produsul lor se divide cu 3 și cu 5.</i>	
	a) Termenii sumei sunt de forma $7 \cdot k + 2, k \in \mathbb{N}$. $2018 = 7 \cdot 288 + 2$	1p
	$S = 7 \cdot 0 + 2 + 7 \cdot 1 + 2 + 7 \cdot 2 + 2 + \dots + 7 \cdot 288 + 2 = 7 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 288) + 2 \cdot 289 =$	2p
	$7 \cdot 288 \cdot 289 : 2 + 2 \cdot 289 = 289 \cdot (7 \cdot 144 + 2) =$ $289 \cdot 1010 \Rightarrow S : 10$	1p
	b) Cazul I: Dacă unul dintre numere este 0 atunci produsul este 0, care este divizibil cu 3 și cu 5.	1p
	Cazul II: Numerele sunt nenule. Demonstrăm că dintre cele 12 numere cel puțin unul se divide cu 3. Presupunem că nici unul din cele 12 nr nu se divide cu 3, rezultă că $S \geq 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 + 13 + 14 + 16 + 17 = 108$, contradicție.	1p
	Demonstrăm că dintre cele 12 numere cel puțin unul se divide cu 5. Presupunem că nici unul din cele 12 nr nu se divide cu 5, rezultă că $S \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 + 12 + 13 + 14 = 90$, contradicție.	1p
4.	<i>Arătați că suma resturilor împărțirii unui număr $\overline{abc}$ la a, b și respectiv c nu poate fi 23.</i>	
	Aplicăm teorema împărțirii cu rest. Notăm cu c_1, c_2, c_3 respectiv r_1, r_2, r_3 câturile și resturile împărțirii lui $\overline{abc}$ la a, b și c . $\overline{abc} = c_1 \cdot a + r_1, r_1 < a; \overline{abc} = c_2 \cdot b + r_2, r_2 < b; \overline{abc} = c_3 \cdot c + r_3, r_3 < c$	2p
	a, b, c - cifre $\Rightarrow a, b, c \leq 9 \Rightarrow r_1, r_2, r_3 \leq 8 \Rightarrow$ suma maximă $r_1 + r_2 + r_3$ este 24.	1p
	Pentru ca suma să fie 23 deducem că două dintre resturi sunt 8, iar al treilea este 7 $\Rightarrow$ două din cifrele a, b, c sunt egale cu 9, iar a treia poate fi 8 sau 9.	2p
	Se formează numerele: 999, 989, 998, 899.	1p
	Se verifică fiecare din aceste numere (prin împărțirea la cifrele lor) și se constată că nu există soluții.	1p