

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- 21 Februarie 2016

Clasa a XII – a

SUBIECTUL I (7 p)

Fie $a \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție " $\circ$ " definită pe $\mathbb{R}$ astfel: $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Demonstrați că $(\mathbb{R}, \circ)$ este monoid comutativ;
b) Determinați numerele reale x cu proprietatea că $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2016 \text{ de } x} = x$.

SUBIECTUL II (7 p)

- a) Calculați $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$, pentru $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
b) Calculați $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx$.

SUBIECTUL III (7 p)

Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $(a_n)_{n \geq 1}$ șirul definit prin $a_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx, n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f(0)$.
b) Dacă f este derivabilă în $x = 0$ să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - f(0))$.

SUBIECTUL IV (7 p)

Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $2n+1$ elemente și o funcție $f: G \rightarrow G$ cu proprietatea :

$$f(xf(xy)) = yf(x^2), \forall x, y \in G.$$

Să se demonstreze că G este grup comutativ.

Gazeta Matematică

NOTĂ

- ☐ Toate subiectele sunt obligatorii;
☐ Nu se acordă puncte din oficiu;
☐ Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.