



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 11.02.2023

Clasa a VII-a - BAREM

Problema 1

a) Demonstrați că pentru orice număr natural n este adevărată relația

$$\sqrt{2^n + 7} + \sqrt{3^n + 10} + \sqrt{7^n + 3} \notin N.$$

b) Fie x și y numere naturale nenule astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2023}$. Arătați că

$$\sqrt{(x - 2023)(y - 2023)} = 2023$$

Barem:

- a) $n = 4k \Rightarrow u(2^n + 7) = 3 \text{ sau } 8 \Rightarrow \sqrt{2^n + 7} \notin N$
 $n = 4k + 1 \Rightarrow u(3^n + 10) = 3 \Rightarrow \sqrt{3^n + 10} \notin N$
 $n = 4k + 2 \Rightarrow u(7^n + 3) = 2 \Rightarrow \sqrt{7^n + 3} \notin N$
 $n = 4k + 3 \Rightarrow u(3^n + 10) = 7 \Rightarrow \sqrt{3^n + 10} \notin N \dots\dots\dots 4p$
- b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2023} \Rightarrow \frac{xy}{x+y} = 2023 \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{xy}{x+y})(y - \frac{xy}{x+y})} = \sqrt{\frac{x^2}{x+y} \cdot \frac{y^2}{x+y}} = \frac{xy}{x+y} = 2023 \dots\dots\dots 3p$

Problema 2

Folosind inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică, demonstrați că

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{2022 \cdot 2023}}{4045} < 1011$$

Gazeta matematică nr. 12/2022

Barem:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} \dots\dots\dots 1p$$
$$\frac{1+2}{2} > \sqrt{1 \cdot 2} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} < \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$$
$$\frac{\sqrt{6}}{5} < \frac{1}{2}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\frac{\sqrt{2022 \cdot 2023}}{2022+2023} < \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$$

Adunăm relațiile și obținem:

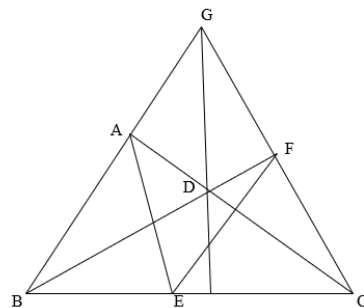
Probleme selectate și propuse de prof. Gînta Vasile, prof. Gînta Florica, prof. Bozdog Constantin



$$S < \frac{2022}{2} = 1011 \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3

În triunghiul ABC , bisectoarea BD cu $D \in (AC)$ intersectează paralela prin E mijlocul laturii BC , la latura AB , în punctul F , iar CF intersectează pe AB în punctul G . Știind că GD este perpendiculara pe BC , demonstrați că $AE = \frac{1}{2} BG$.



Barem:

Din faptul că $EF \parallel AB$ și E mijlocul segmentului (BC) deducem din reciproca teoremei liniei mijlocii că, F este mijlocul segmentului (GC)2p
 Atunci, BF este mediană și bisectoare în $\triangle GBC$ isoscel, deci și înălțime.2p
 Vom avea că GD și BF sunt înălțimi în triunghiul GBC și cum $BF \cap AC \cap GD = \{D\}$ rezultă că și AC este înălțime (în orice triunghi înălțimile sunt concurente), deci $m(\angle BAC) = 90^\circ$2p
 Cum $\triangle GBC$ isoscel cu $BC = BG$ și AE este mediană în triunghiul dreptunghic ABC deducem că $AE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} BG$1p

Problema 4

Fie A, B, C trei puncte pe un cerc, astfel încât A și C să nu fie diametral opuse. Tangentele în A și C la cerc se intersectează în O . Cercul de centru O și rază OA intersectează dreapta CO în D (O între C și D). Să se arate că:

- Dacă B este pe arcul mare $\widehat{AC}$, atunci în patrulaterul $ABCD$, $\angle ABC$ și $\angle ADC$ sunt complementare.
- Dacă B este pe arcul mic $\widehat{AC}$, atunci în patrulaterul $ABCD$, $\angle BAD$ și $\angle BCD$ sunt complementare.

prof. Constantin Bozdog, Reghin

Barem:

a) O și B sunt în semiplane diferite determinate de AC .

$$\angle ABC = \angle ACO = \frac{\widehat{AC}}{2} \dots\dots\dots 1p$$

Probleme selectate și propuse de prof. Gînta Vasile, prof. Gînta Florica, prof. Bozdog Constantin



$AO=CO$ (tangente din O la cerc).....1p

$\sphericalangle CAD = 90^\circ$ ($AO=CO=DO$).....1p

$\Rightarrow \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 90^\circ$1p

b) O și B sunt în același semiplan determinat de AC

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCD = \frac{\widehat{BC}}{2}$1p

$\sphericalangle CAD = 90^\circ$ ($AO=CO=DO$).....1p

$\Rightarrow \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle CAD = 90^\circ$1p