



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ - 28 FEBRUARIE 2016

BAREM DE CORECTARE  
CLASA A XII –A

1.a) Funcția  $f : C^* \rightarrow G$ ,  $f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  este izomorfism de grupuri.

- Definiția lui  $f$  (sau a lui  $f^{-1}$ ) **1p**
- $f$  bijectivă **1p**
- $f$  morfism **1p**

b) Singurul subgrup  $H$  al lui  $(C^*, \cdot)$  și care are  $n$  elemente este cel al rădăcinilor de ordinul  $n$  ale unității **1p**

Folosind a), rezultă că și  $G$  are un subgrup cu  $n$  elemente **1p**

Din  $H = U_n = \{z \in C^* | z^n = 1\}$ , deducem că  $f(H) = \left\{ f\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) | k \in \overline{0, n-1} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \frac{2k\pi}{n} & \sin \frac{2k\pi}{n} \\ -\sin \frac{2k\pi}{n} & \cos \frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} | k \in \overline{0, n-1} \right\}$  este subgrupul căutat. **2p**

2.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 a^{x^3+3x} \cdot (x^5 + 4x^3 + 3x) \ln a \, dx = \int_0^1 a^{x^3+3x} [x^3(x^2 + 1) + 3x(x^2 + 1)] \ln a \, dx = \\ &= \int_0^1 a^{x^3+3x} \cdot (x^2 + 1)(x^3 + 3x) \ln a \, dx = \mathbf{2p} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (a^{x^3+3x})' \cdot (x^3 + 3x) \, dx \mathbf{2p} \\ &= \frac{1}{3} a^{x^3+3x} \cdot (x^3 + 3x) \Big|_0^1 - \int_0^1 a^{x^3+3x} \cdot (x^2 + 1) \, dx \mathbf{1p} \\ &= \frac{4a^4}{3} - \frac{1}{3 \ln a} \cdot a^{x^3+3x} \Big|_0^1 \mathbf{1p} \\ &= \frac{4a^4}{3} - \frac{a^4}{3 \ln a} + \frac{1}{3 \ln a} = \frac{1}{3 \ln a} (4a^4 \ln a - a^4 + 1) \mathbf{1p} \end{aligned}$$

3. a) Funcția  $f$  fiind continuă are primitive pe  $(0, 1]$ . Pentru  $x \in (0, 1)$  avem:

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx &= - \int \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \arcsin x \, dx = -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} dx = \mathbf{2p} \\ &= -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} dx = -\frac{1}{x} \arcsin x - \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} dx \\ &= -\frac{1}{x} \cdot \arcsin x - \ln \left( \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right) + C \mathbf{1p} \end{aligned}$$

Atunci funcția  $F: (0, 1] \rightarrow R$ ,  $F(x) = -\frac{1}{x} \cdot \arcsin x - \ln \left( \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right)$  este o primitivă pentru  $f$  chiar pe  $(0, 1]$ , deci  $\int f(x) dx = F(x) + C$  **1p**



b) Presupunem că  $\exists g$  cu proprietatea cerută. Atunci  $g$  are Proprietatea lui Darboux pe  $I$ .

Fie  $a, b \in I$  astfel încât  $g(a) = g(b) \Rightarrow g(g(a)) = g(g(b)) \Rightarrow f(a) = f(b) \xRightarrow{f \text{ inj}} a = b$ , deci  $g$  este

injectivă.

1p

Din  $g$  injectivă și  $g$  are P.D  $\Rightarrow g$  e strict monotonă

1p

$\Rightarrow g \circ g$  strict crescătoare  $\xRightarrow{ip} f$  strict crescătoare, contradicție

1p