Olimpiada Naţională de Matematică
8 Aprilie 2014

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE
CLASA a IX-a

Problema 1. Fie n un număr natural. Să se afle numerele întregi x, y, z cu proprietatea
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n (x + y + z).$$

Soluţie. Dacă $n = 0$, folosind inegalităţile evidente $x^2 \geq x$ şi analoagele, deducem că $x, y, z \in \{0, 1\}$ .... 1 punct

Dacă $n \geq 1$, atunci 2 divide $x^2 + y^2 + z^2$, deci ori cele trei numere sunt pare, ori unul e par şi două impare. În acest ultim caz, luând, de exemplu, $x = 2x_1 + 1$, $y = 2y_1 + 1$, $z = 2z_1$, obţinem
$$4\left(x_1^2 + x_1 + y_1^2 + y_1 + z_1^2\right) + 2 = 4(x_1 + y_1 + z_1 + 1),$$
contradicţie .... 2 puncte

Rămâne cazul în care x, y, z sunt pare. Pentru $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, obţinem
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^{n-1}(x_1 + y_1 + z_1),$$
deci, dacă $n = 1$, $x, y, z \in \{0, 2\}$ .... 2 puncte

Pentru $n > 1$, repetând raţionamentul, deducem că dacă $x = 2^n x_n$, $y = 2^n y_n$, $z = 2^n z_n$, atunci x_n, y_n, $z_n \in \mathbb{Z}$ şi
$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = x_n + y_n + z_n,$$
de unde x_n, y_n, $z_n \in \{0, 1\}$, deci x, y, $z \in \{0, 2^n\}$ .... 2 puncte

Problema 2. Fie a un număr natural impar care nu este pătrat perfect. Să se arate că dacă m şi n sunt numere naturale nenule, atunci

a) $\{m(a + \sqrt{a})\} \neq \{n(a - \sqrt{a})\}$;

b) $[m(a + \sqrt{a})] \neq [n(a - \sqrt{a})]$.

Soluţie. a) Cum ma, na sunt numere naturale, egalitatea ar atrage $\{m\sqrt{a}\} = \{-n\sqrt{a}\}$ .... 1 punct

Două numere au aceeaşi parte fracţionară doar dacă diferenţa lor este număr întreg, de unde $(m + n)\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$, absurd .... 1 punct

b) Din nou prin absurd, fie N natural nenul pentru care există m, n diferite nenule cu $N = [m(a + \sqrt{a}] = [n(a - \sqrt{a}]$. Prin urmare
$$N \leq m(a + \sqrt{a}) < N + 1, \quad N \leq n(a - \sqrt{a}) < N + 1$$
iar inegalităţile sunt stricte căci termenii din centru sunt iraţionali .... 1 punct

Inegalităţile se rescriu
$$\frac{N}{a + \sqrt{a}} < m < \frac{N + 1}{a + \sqrt{a}}, \quad \frac{N}{a - \sqrt{a}} < n < \frac{N + 1}{a - \sqrt{a}},$$
de unde prin adunare
$$N\frac{2}{a - 1} < m + n < (N + 1)\frac{2}{a - 1}.$$
.... 2 puncte

De aici, $N < \frac{a-1}{2}(m + n) < N + 1$, în contradicţie cu faptul că numărul din mijloc este natural (a impar) .... 2 puncte

Observaţie. Problema poate fi considerata ca parte din teorema Beatty care afirmă că mulţimile de tipul $[na]$ şi $[nb]$ determină o partiţie a lui $\mathbb{N}$ dacă şi numai dacă a şi b sunt iraţionale şi $1/a + 1/b = 1$.

Problema 3. Fie P şi Q mijloacele diagonalelor BD şi AC ale patrulaterului $ABCD$. Se consideră punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $R \in (PQ)$ şi $S \in (AC)$ astfel încât

$$\frac{BM}{MC} = \frac{DN}{NC} = \frac{PR}{RQ} = \frac{AS}{SC} = k.$$

Să se arate că centrul de greutate al triunghiului AMN este situat pe segmentul $[RS]$.

Soluţie. Fie G centrul de greutate al triunghiului AMN. Avem

$$\overline{GR} = \frac{\overline{GP} + k\overline{GQ}}{1+k} = \frac{\overline{GB} + \overline{GD} + k\left(\overline{GA} + \overline{GC}\right)}{2(1+k)}$$

şi

$$\overline{GS} = \frac{\overline{GA} + k\overline{GC}}{1+k}.$$

.... 2 puncte

Pe de altă parte,

$$0 = \overline{GA} + \overline{GM} + \overline{GN} = \overline{GA} + \frac{\overline{GB} + k\overline{GC}}{1+k} + \frac{\overline{GD} + k\overline{GC}}{1+k},$$

.... 1 punct

de unde deducem

$$(1+k)\overline{GA} + \overline{GB} + 2k\overline{GC} + \overline{GD} = 0,$$

de unde rezultă imediat

$$\overline{GS} + 2\overline{GR} = 0,$$

aşdar punctele G, R şi S sunt coliniare. .... 4 puncte

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de diametru AC. Se ştie că există punctele $E \in (CD)$ şi $F \in (BC)$ astfel încât dreapta AE e perpendiculară pe DF, iar AF e perpendiculară pe BE.

Să se arate că $AB = AD$.

Soluţie.

Din condiţiile de perpendicularitate avem

$$\overline{AE} \cdot \overline{DF} = 0 \Leftrightarrow \overline{AE} \cdot \left(\overline{AF} - \overline{AD}\right) = 0,$$
$$\overline{AF} \cdot \overline{BE} = 0 \Leftrightarrow \overline{AF} \cdot \left(\overline{AE} - \overline{AB}\right) = 0,$$

.... 1 punct

de unde

$$\overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AE} \cdot \overline{AD},$$
$$\overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AF} \cdot \overline{AB},$$

deci

$$\overline{AE} \cdot \overline{AD} = \overline{AF} \cdot \overline{AB}.$$

.... 2 puncte

Echivalent, putem scrie

$$\left(\overline{AD} + \overline{DE}\right) \cdot \overline{AD} = \left(\overline{AB} + \overline{BF}\right) \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow AD^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DE} = AB^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BF}.$$

.... 2 puncte

Dar $\angle ADE = \angle ABF = 90^\circ$, deci

$$\overline{AD} \cdot \overline{DE} = \overline{AB} \cdot \overline{BF} = 0,$$

aşadar $AB = AD$. .... 2 puncte