



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală
11 februarie 2023

Clasa a XI -a

1. Rezolvați în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuația: $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Benedict G. Niculescu

2. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB=BA$, $\det(A^4+A^2B^2+B^4)=9$ și $\det(A^2+B^2)+\det(AB)=5$.

Să se calculeze $\sqrt{\det(A^2 + AB + B^2)} + \sqrt{\det(A^2 - AB + B^2)}$.

3. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termeni strict pozitivi, dat de relația $a_{n+1} = \ln(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, $n \geq 1$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) \cdot e^{a_n}$.

Nicolae Mușuroia, Baia Mare
Gazeta Matematică nr. 10/2022

4. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_1 > 0$ (a_1 fixat) și pentru $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{k}} \right\rfloor}{na_n}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a .

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota cu puncte între 0 și 7.

Timp de lucru: 3 ore.