

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a IX-a
27.02.2015

Subiectul I.(20 puncte)

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale pozitive cu $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că

$$\sqrt{a_1 + 2} + \sqrt{a_2 + 6} + \dots + \sqrt{a_n + n \cdot (n+1)} < n \cdot (n+1).$$

prof. Camelia Magdaș, Colegiul Național Andrei Mureșanu Dej

Subiectul II.(30 puncte)

Se consideră triunghiul ABC. Paralelele duse prin vârfurile triunghiului la laturile opuse se intersectează două câte două în punctele M, N, P. Dacă G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor BCP, AMC respectiv ANB, să se arate că se poate construi un triunghi cu vectorii $\overrightarrow{AG_1}, \overrightarrow{BG_2}$ și $\overrightarrow{CG_3}$.

prof. Camelia Magdaș, Colegiul Național Andrei Mureșanu Dej

Subiectul III.(25 puncte)

Într-un triunghi oarecare ABC, punctele D, E, F desemnează picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A, B, C. Demonstrați că : $a(b+c) \cdot \overrightarrow{AD} + b(a+c) \cdot \overrightarrow{BE} + c(a+b) \cdot \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

prof. Vlad Ciobotariu - Boer, Liceul Teoretic „Avram Iancu” Cluj-Napoca

Subiectul IV.(15 puncte)

Fie $a_k = \sqrt{(k^2 - k - 2)(k^2 + 7k + 10) + 36}, k \in \mathbb{N}^*$ Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care:

$$[\sqrt{a_1}] + [\sqrt{a_2}] + [\sqrt{a_3}] + \dots + [\sqrt{a_n}] = 490, \text{ unde } [a] \text{ reprezintă partea întreagă a numărului real } a.$$

prof. Violin Gorcea, Liceul Teoretic „Avram Iancu” Cluj-Napoca

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Țimp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a X-a
27.02.2015

Subiectul I.(20 puncte)

Demonstrați că în orice triunghi ascuțitunghic ABC are loc relația: $\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C \geq 9$

prof. Marilena Faiciuc, Colegiul Național Pedagogic "Gh. Lazăr" Cluj-Napoca

Subiectul II.(30 puncte)

Să se rezolve ecuația: $13^{x^2} \cdot 25^{x^2+2x+\frac{3}{2}} \cdot 31^{x^2+x+1} = 2015$.

prof. Raul Domșa, Liceul Teoretic „Petru Maior” Gherla

Subiectul III.(20 puncte)

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Demonstrați că $\log_{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \frac{n+1}{2} \leq \frac{1}{n}$.

Gazeta matematică

Subiectul IV.(20 puncte)

Fie ecuația binomă $z^4 + 1 = 0$. Notăm cu $M_k(z_k)$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ imaginile geometrice ale rădăcinilor ecuației. Să se arate că oricum am lua punctele $P_q(z_q)$, $q \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, în interiorul patrulaterului $M_1 M_2 M_3 M_4$ există două puncte P_i, P_j , $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, astfel încât $|z_i - z_j| < 1$.

prof. Eugen Jecan, Colegiul Național Andrei Mureșanu Dej

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XI-a
27.02.2015

Subiectul I.(20 puncte)

Dacă a, b, c sunt măsurile unghiurilor triunghiului ascuțitunghic ABC, atunci arătați că:

$$\begin{vmatrix} tga & tgc-1 & tgb+1 \\ tgc+tg b & tga-1 & 1 \\ tga \cdot tgb \cdot tgc & -1 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$$

prof. Camelia Magdaș, Colegiul Național Andrei Mureșanu Dej

Subiectul II.(20 puncte)

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^{2015} + A^{2016} + A^{2017} = O_n$ și fie $B = A^2 + A + I_n$. Arătați că matricea $I_n - AB$ este inversabilă.

prof. Cristian Petru Pop, ISJ Cluj, - prelucrare Gazeta matematică

Subiectul III.(40 puncte)

a) Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin formula $x_n = \frac{\frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} + \dots + \frac{1}{n+2014}}{\ln(n+2105)}$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

prof. Raul Domșa, Liceul Teoretic „Petru Maior” Gherla

b) Se dau șirurile (a_n) și (b_n) , unde $a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \geq 1$ și

$b_n = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 + \dots + (2n-1)(2n+1)$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n)^{b_n}$.

prof. Nicolae Alb, Liceul Teoretic „Octavian Goga” Huedin

Subiectul IV.(10 puncte)

Să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ care verifică relația $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 45} - \sqrt{x_n + 5}$, cu $x_0 \geq -5$.

prof. Eugen Jecan, Colegiul Național Andrei Mureșanu Dej

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XII-a
27.02.2015

Subiectul I.(40 puncte)

Fie $G = \{A_x / x \in \mathbb{R}\}$, $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian;
- Demonstrați că $(G, \cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$;
- Calculați A^{2015} , $A \in G$.

prof. Anca Cristina Hodorogea, ISJ Cluj

Subiectul II.(10 puncte)

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu proprietatea că funcția $f : G \rightarrow G$, $f(x) = x^2$ este automorfism de grupuri. Arătați că mulțimea G are un număr impar de elemente.

prof. Simona Pop, Colegiul "Augustin Maior" Cluj-Napoca

Subiectul III.(20 puncte)

a) Să se calculeze: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n x \cdot \sin \frac{1}{x} dx$.

prof. Mirela Blaga, Liceul Teoretic „Alexandru Papiu Ilarian” Dej

b) Să se arate că $\int_0^1 \sum_{k=1}^n \ln(1+kx) dx \leq \frac{n(n+1)}{4}$.

prof. Teodor Poenaru, Liceul teoretic „Nicolae Bălcescu” Cluj-Napoca

Subiectul IV.(20 puncte)

Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, primitivabile, ce verifică relația: $F(x) + \ln(f(x)) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f și $F(0) = 0$.

prof. Cristian Petru Pop, ISJ Cluj

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!