INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: *inf_arad@isjarad.ro*

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA a IX-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Demonstrați că $(1+x)^n + \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$,$(\forall)x > 0$ și $n \in N$

2. Fie $r \geq 0$. Pentru orice numere reale a și b definim mulțimea
$I(a,b) = \{x \in R \mid |x-a| + |x-b| \leq r\}$.
a) Dacă $r < |a-b|$, demonstrați că $I(a,b) = \emptyset$;
b) Dacă $r \geq |a-b| > 0$, demonstrați că $I(a,b)$ este un interval închis și mărginit de lungime r.

3. În patrulaterul ABCD o dreaptă d conține punctul O de intersecție a diagonalelor AC și BD și intersectează laturile (AB) și (CD)în punctele M și N.
Să se demonstreze că: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OD}{OB}$

4. Se dă șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 =- 1, x_2 = 1$ și $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$, $n \geq 1$.
a) Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2} \cdot (3^n - 4n - 1)$;
b) Să se demonstreze că oricare doi termeni conscutivi ai șirului sunt numere întregi prime între ele.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD

Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,

web : www.isjarad.ro e-mail: *inf_arad@isjarad.ro*

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA a X-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, cu proprietatea $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$ și $z = \frac{z_1}{z_2}$. Să se demonstreze că:

   a) $|z| = 1$ și $z \neq 1$

   b) $\{z^n | n \in \mathbb{Z}\} = \{1, z, z^2\}$

2) Fie $a, b, c > 1$. Să se arate că

   a) $\log_a (b \cdot c) + \log_b (c \cdot a) + \log_c (a \cdot b) \geq 6$

   b) $\log_a \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} + \log_b \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} + \log_c \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq 3$

3) a) Să se calculeze numărul real $x = \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} - 10} - \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} + 10}$.

   b) Să se demonstreze că

$$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_5 2} \geq 3$$

4) a) Să se rezolve ecuația $(\sqrt{5} + 2)^x + (\sqrt{5} - 2)^x = 18$.

   b) Să se arate că $\left(\frac{b}{c}\right)^{\lg a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\lg b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\lg c} = 1$, unde $a, b, c > 0$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: *inf_arad@isjarad.ro*

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA a XI-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Să se rezolve în mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

2. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$. Să se arate că $\det\left(I_n + A + A^2\right) \geq 0$.

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_{n+1} = \dfrac{8+2x_n^3}{3x_n^2}$, $\forall n \geq 1$, $x_1 > 2$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin $y_{n+1} = \dfrac{2y_n^3 + 3y_n^2 + 7}{3(y_n+1)^2}$, $\forall n \geq 1$ şi $y_1 > 0$. Arătaţi că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente şi calculaţi limitele lor.

4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2017 + \cos\sqrt{x^2+x+2}}{2017 + \cos\sqrt{x^2+x+1}}$.
   a) Arătaţi că $f(0) < 1$.
   b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA a XII-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Există funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au primitive F pe $\mathbb{R}$, astfel încât $F^2(x) \cdot f(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$? Justificați.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{(\sin x)^2}$

3. Fie $(G_1, \cdot)$,$(G_2, \cdot)$ două grupuri și $H \subset G_1$ un subgrup al lui G_1. Să se arate că dacă f:$G_1 \to G_2$ este morfism de grupuri, atunci mulțimea $f(H) = \{f(x) | x \in H\}$ este subgrup al lui G_2 .

4. Fie $G = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{M}_p(C)$ astfel încât $(G, \cdot)$ este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor. Arătați că $\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)^2 = n \cdot \sum_{k=1}^{n} A_k$