

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

25 februarie 2023

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Se consideră numerele: $a = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ și $b = (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})$.
Demonstrați că numărul: $a \cdot b$ este rațional, iar numerele: a , b , $a + b$ sunt iraționale.

Subiectul 2. Arătați că numărul: $N = 49^n - 48n - 1$ se divide cu 2304, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Subiectul 3. Fie $a, b \in (0,1)$ astfel încât $a^2 + b^2 = 1$. Demonstrați că:

$$a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 3\sqrt{2}.$$

Subiectul 4. Se consideră un triunghi oarecare ABC și punctele: M – simetricul lui A față de B ; N – simetricul lui B față de C ; P – simetricul lui C față de A . Arătați că triunghiurile MNP și ABC au același centru de greutate.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.