

BAREM DE NOTARE –clasa a IX-a

Problema	Soluție	Punctaj
1	a) $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2 \geq 4 \frac{a}{b}, \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 4 \frac{b}{a}$ $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4 \cdot 2 = 8;$ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$ b) Aplicand inegalitatea mediilor vom avea : $\frac{2ab}{b^2 + ca} = \frac{2}{\frac{b}{a} + \frac{c}{b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right);$ $\frac{2bc}{c^2 + ab} = \frac{2}{\frac{b}{c} + \frac{a}{b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right);$ $\frac{2ca}{a^2 + bc} = \frac{2}{\frac{a}{c} + \frac{b}{a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)$ De unde prin sumare rezulta inegalitatea ceruta.	1p 1p 1p 1p 1p 1p
2	a) Pentru că membrul întâi este număr întreg deducem că $\frac{5x+1}{3} \in \mathbb{Z} \rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} a. \hat{.}$ $\frac{5x+1}{3} = n.$ Ecuția devine : $\left[\frac{2n+1}{5}\right] + \left[\frac{4n+7}{10}\right] = n$ (1) Din definiția părții întregi avem: $\frac{2n+1}{5} - 1 < \left[\frac{2n+1}{5}\right] \leq \frac{2n+1}{5}$ și $\frac{4n+7}{10} - 1 < \left[\frac{4n+7}{10}\right] \leq \frac{4n+7}{10}.$ prin adunarea și cu relația (1) avem $\frac{8n-11}{10} < n \leq \frac{8n+9}{10} \rightarrow n \in \{-5, -4, \dots, 3, 4\}$ și $x = \frac{3n-1}{5}.$ b) Se aplică identitatea lui Hermite: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x].$ $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + [2x + \frac{1}{2}] + \dots + [2^{2013}x + \frac{1}{2}] = [2x] + [2x + \frac{1}{2}] + \dots + [2^{2013}x + \frac{1}{2}] =$ $[2^2x] + [2^2x + \frac{1}{2}] + \dots + [2^{2012}x + \frac{1}{2}] + [2^{2013}x + \frac{1}{2}] = [2^{2013}x] + [2^{2013}x + \frac{1}{2}] = [2 \cdot 2^{2013}x] = [2^{2014}x] \text{ (3p)}$	1p 1p 1p 1p 1p 3p
3	a) În relația din enunț facem $n = 1 \rightarrow x_1 = a+b$; ptr. $n = 2 \rightarrow x_1 + x_2 = 4a+2b \rightarrow x_2 = 3a + b, a. \hat{.} x_2 - x_1 = 2a = r;$ prin metoda inducției pp. $x_n = x_1 + (n-1)r = a + b + (n-1) \cdot 2a$ Să dem. că $x_{n+1} = x_1 + nr = a + b + n \cdot 2a$; în relația din enunț trecem pe $n \rightarrow n+1$; $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) \rightarrow$ $an^2 + bn + x_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) \text{ etc.}$ b) Fie $a, a+r, a+2r, \dots, a+(n-1)r$, n numere în progresie aritmetică și p prim, $p < n$. Prin împartirea la p a acestor numere prime, vom obține într-o anumită ordine resturile $1, 2, \dots, p-1$, dacă $a \neq p$, sau resturile $0, 1, 2, \dots, p-1$ dacă $a=p$.	1p 1p 1p 1p

	Deoarece numarul lor este mai mare decit numarul resturilor, cel putin doua vor da acelasi rest. Fie $a+ir=q_1p+r$, $a+jr=q_2p+r$ cu $0 \leq i < j \leq p-1 \Rightarrow$ $(j-i)r=(q_2-q_1)p \Rightarrow p$ divide $(j-i)r$, dar $j-i < p$ si daca p nu divide $j-i$ atunci p divide r.	1p 2p
4	Fie M,N,P mijloacele laturilor (BC),(AC),(AB) si O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.Au loc relațiile : Au loc relațiile: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OD}) \rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}$ Dar $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \rightarrow \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$ și relații analoage $\overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OC};$ Fie Q centrul de greutate al triunghiului DEF și G centrul de greutate al triunghiului ABC. Au loc relațiile: $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -\overrightarrow{OG};$ Dacă cele două triunghiuri au același centru de greutate vom avea $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OQ} \rightarrow$ $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OG}$ de unde $O = G$ a.î. triunghiul ABC este echilateral.	3p 2p 2p