

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

25 februarie 2023

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea de compoziție „ $*$ ” dată prin $x * y = xy + 4(x + y) + 12$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. Aflați ultimele două cifre ale numărului: $1 * 2 * 3 * \dots * n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$).

Subiectul 2. Fie G un grup cu elementul neutru notat cu e , pentru care există $a \in G$ astfel încât $G \setminus \{a\}$ este subgrup al lui G . Demonstrați că: $G = \{e, a\}$.

Subiectul 3. Calculați:

$$\int \frac{\sin x + 3 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Subiectul 4. Fie

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Calculați: $I_{n-1} + I_{n+1}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$; b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.