



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare cu $a \geq b$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$, unde A_n, B_n reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv de pe diagonala secundară a matricei A^n .

2. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin: $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$.

a) Arătați că $a_n < 1, \forall n \geq 1$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n$.

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot a_n$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $\text{Tr}(A) = 1$ și $\det(A^2 + A + I_2) \leq 2\sqrt{3} \cdot \det A$.
Demonstrați că: $\det(A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2) = \sqrt{3}$.

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ strict descrescător în care

$$x_1 > 0 \text{ și } x_n^4 + 4x_n \geq x_n^2 + x_n^3 \cdot x_{n+1} + 4, \forall n \geq 1.$$

Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și aflați limita sa.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu)

Timp de lucru: 3 ore