

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 21 februarie 2016

Clasa a XI - a

SUBIECTUL I (7p)

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = a_n \sqrt{\frac{n}{n+a_n^4}}$, $n \geq 1$. Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze limita sa.

Florin Rotaru, Focșani - GM. 11/2015.

SUBIECTUL II (7p)

- (2p) a) Să se arate că dacă funcția $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este periodică și există $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = l$, atunci $l \in \mathbf{R}$ și F este constantă.
- (5p) b) Determinați funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care verifică condițiile:
- i) există $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = a \in \mathbf{R}$;
 - ii) $f(x+2) + f(x) = 2f(x+1)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL III (7p)

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

- (1p) a) Determinați toate matricele $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ pentru care $AB = BA$;
- (3p) b) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ ecuația $X^2 = A$;
- (1p) c) Arătați că $A^2 = 2 \cdot 3 \cdot A - 3^2 \cdot I_2$ și $A^3 = 3 \cdot 3^2 \cdot A - 2 \cdot 3^3 \cdot I_2$;
- (2p) d) Calculați A^{2016} .

SUBIECTUL IV (7p)

- (2p) a) Să se demonstreze că $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ cu $AB = BA$, avem $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
- (5p) b) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ astfel încât $A + {}^t A = O_n$. Să se arate că $(\forall) \lambda \in \mathbf{R}$, avem $\det(I_n + \lambda A^2) \geq 0$.

NOTĂ: Timp de lucru – 3 ore