

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 15 februarie 2015

Clasa a XI-a

1. Pentru orice două numere pozitive x și y considerăm determinantul:

$$\Delta(x; y) = \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$$

- a) Arătați că $\Delta(x; y) \geq 0$, $(\forall) x, y \in [0, \infty)$.

- b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Delta(1; x)}{\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 2} - 1}$.

2. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_0 > 0$ și $a_{n+1} = \frac{16a_n^3 + 15a_n}{16}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

- a) Arătați că, pentru $a_0 \in (0; \frac{1}{4}]$, șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent și calculați limita sa.

- b) Arătați că, pentru $a_0 > \frac{1}{4}$, șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este divergent.

3. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det A = \det B = 1$. Să se demonstreze echivalența $(AB - BA)^2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + B^2 = A^{-1}BAB + B^{-1}ABA$.

Gazeta matematică

4. a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

- b) Fie șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ pentru care există și sunt finite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\ln n} = l$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_{n+1} - a_n) = L$. Să se determine relația între l și L .

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.