

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 17 FEBRUARIE 2018

CLASA a IX -a

BAREME:

1.

a) Demonstrați că : $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică de rație $q \neq 1$. Calculați suma:

$T_n = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + nb_n$ în funcție de b_1 și q .

Barem:

a) Fie $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

$$S_n(x) - x \cdot S_n(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) - nx^n = \frac{1 - x^n}{1 - x} - nx^n = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{1 - x}$$

Deducem că $S_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$, pentru $x \neq 1$ 4p

b) Folosind formula termenului general $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ avem:

$$T_n = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + nb_n = b_1 + 2b_1 \cdot q + 3b_1 \cdot q^2 + \dots + nb_1 \cdot q^{n-1} \dots\dots\dots 1p$$

$$T_n = b_1(1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}) = b_1 \cdot S_n(q), \text{ unde } S_n(q) \text{ este suma de la punctul a) } \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare: } T_n = b_1 \cdot \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2} \dots\dots\dots 1p$$

2. În patrulaterul ABCD, O_1 este mijlocul diagonalei AC și O_2 este mijlocul diagonalei BD.

a) Să se arate că $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}}{2}$.

b) Să se arate că dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$, atunci ABCD este paralelogram.

Barem:

a) Fia M un punct în plan. În triunghiul MAC, MO_1 este mediană, rezultă

$$\overrightarrow{MO_1} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}}{2}. \text{ Analog în triunghiul MBD, } \overrightarrow{MO_2} = \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}}{2} \dots\dots\dots 2p$$

În triunghiul MO_1O_2 avem: $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{MO_2} - \overrightarrow{MO_1} = \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}}{2} - \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}}{2} = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}) - (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})] = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$2p

b)

Relația dată $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$ se scrie $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = 3 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$ 1p

Din punctul a) avem $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$.

Atunci $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$, de unde rezultă $2\overrightarrow{O_1O_2} = 3\overrightarrow{O_1O_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0}$ 1p

Aceasta înseamnă că O_1 și O_2 coincid, adică diagonalele AC și BD au același mijloc, rezultă că patrulaterul ADCB este paralelogram..... 1p.

3. Fie $a, b, c > 0$. Să se demonstreze că:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Barem :

Notăm $b + c = x$, $c + a = y$, $a + b = z$1p

Se obține $a = \frac{-x+y+z}{2}$, $b = \frac{x-y+z}{2}$, $c = \frac{x+y-z}{2}$2p

Inegalitatea se transformă în:

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$$
.....1p

$$\text{Sau } \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 6 \quad (*)$$
.....2p

Deoarece $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\forall x, y > 0$ (si analoagele)

rezultă că inegalitatea (*) este adevarată.....1p

4. Rezolvați ecuația $2 \cdot [x] \cdot (1 + \{x\}) = 2x + 1$, unde $[a]$ -partea întreagă a lui a și $\{a\}$ -partea fracționară a lui a .

Barem:

Deoarece $x = [x] + \{x\}$, ecuația se scrie

$$2[x] + 2[x]\{x\} = 2[x] + 2\{x\} + 1$$
.....2p



de unde obținem :

$$[x] = \frac{2\{x\}+1}{2\{x\}} \quad \text{sau} \quad [x] = 1 + \frac{1}{2\{x\}} \dots\dots\dots 2p$$

Cum $[x]$ este număr întreg , rezultă că

$$\frac{1}{2\{x\}} = k, \text{ unde } k \text{ este număr natural nenul.}$$

$$\text{De aici } \{x\} = \frac{1}{2k} \text{ si } [x] = 1 + k \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{În concluzie , orice } x = \frac{2k^2+2k+1}{2k}, k\text{-număr natural nenul, este soluție a ecuației}$$

$\dots\dots\dots 1p$