

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 28.02.2015

CLASA a IX-a

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Dacă $a, b, c \geq 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că: $a^n(b+c-2a) + b^n(a+c-2b) + c^n(a+b-2c) \leq 0$.

Subiectul 2 (7 puncte)

2. Arătați că, dacă $n \in \mathbb{N}, n > 2$, atunci numărul $3^n + 1$ nu este divizibil cu 2^n .

Subiectul 3 (7 puncte)

3. Arătați că nu există nici o progresie aritmetică infinită cu rația nenulă care să fie formată numai din numere prime.

Subiectul 4 (7 puncte)

4. Fie triunghiul ABC

a) dacă M este mijlocul lui [BC], arătați că $2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b) să se arate că putem construi un triunghi folosind medianele AM, BN și CP ale triunghiului dat.

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 28.02.2015
CLASA a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Să se rezolve ecuația:
$$\frac{1}{4^x + 1} + \frac{1}{2^x \cdot 3^x - 1} = \frac{2^x}{4^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^x - 3^x}.$$

(Marin Marin, prof. univ. habil. dr.)

Subiectul 2 (7 puncte)

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, $|a| = |b| = |c|$. Să se arate că dacă ecuația $az^2 + bz + c = 0$ are cel puțin o rădăcină de modul 1, atunci $b^2 = ac$.

Subiectul 3 (7 puncte)

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg(x^3 + x) = \log_2 x$

Subiectul 4 (7 puncte)

4. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ două funcții crescătoare și surjective. Dacă $\forall x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$, să se arate că $f = g$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 28.02.2015
CLASA a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Să se studieze convergența și limita șirului

$$a_n = \sin \pi \sqrt[k]{(n+1)(n+2) \dots (n+k)}, \text{ unde } k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

Subiectul 2 (7 puncte)

2. Demonstrați că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ecuația $\frac{1^{nx} + 2^{nx} + \dots + n^{nx}}{n^{nx}} = \frac{e}{e-1}$ are o unică rădăcină reală.

Subiectul 3 (7 puncte)

3. Se consideră șirul $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a_n - \frac{\pi^2}{6} \right)$.

Subiectul 4 (7 puncte)

4. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $A, B \in M_2(R)$ astfel încât $A^m \cdot B^n = B^n \cdot A^m$. Să se arate că dacă matricele A^m și B^n nu sunt de forma $\lambda I_2, \lambda \in R$, atunci $AB = BA$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 28.02.2015
CLASA a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu două elemente fixate $a, b \in A$ cu proprietățile

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2, \quad (a + b)^3 = a^3 + b^3$$

Să se arate că $(a + b)^{2015} = a^{2015} + b^{2015}$.

(Marin Marin, prof. univ. habil. dr.)

Subiectul 2 (7 puncte)

2. Să se calculeze: $\int \frac{e^x(x-2)}{x(x^2 + e^x)} dx, x \in (0, \infty)$

Subiectul 3 (7 puncte)

3. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că I_n este o funcție descrescătoare de n

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-2}}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}$

Subiectul 4 (7 puncte)

4. Matricea pătratică $A(a_{ij})$, de ordinul n , are proprietatea

$$\frac{1}{m^n} \begin{vmatrix} a_{11} + m & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + m & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \frac{1}{m} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \frac{1}{m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + \frac{1}{m} \end{vmatrix} \quad \text{egalitatea având loc}$$

pentru cel puțin $n+1$ valori distincte ale lui $m \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că determinantul matricei A are valoarea 1.

(Marin Marin, prof. univ. habil. dr.)

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
 Timp de lucru 3 ore.
 Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.