

## S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

## Olimpiada de matematică

Faza locală

14.02.2014

Clasa a V-a

**Subiectul I.**

Pentru orice  $n$  număr natural, aflați restul împărțirii numărului  $A=5^{n+4} \cdot 3^{n+1} + 5^{n+1} \cdot 3^{n+3} + 3 \cdot 15^n$  la 2013.

**Subiectul II.**

Stabiliți dacă următoarele numere sunt pătrate perfecte:

$$a=2001^2-2001-2000;$$

$$b=(1+2+3+\dots+2002) \cdot 3003^{2005};$$

$$c=2^{2n+1} \cdot 5^{2n+3} - 3; n \in \mathbf{N}.$$

**Subiectul III.**

Ana și Barbu desenează pe câte o foaie de hârtie grupuri de steluțe. Ana desenează o steluță, apoi 3 steluțe apoi 5 și așa mai departe, de fiecare dată un număr impar. Barbu desenează 2 steluțe, apoi 4 steluțe, apoi 6 și așa mai departe, de fiecare dată un număr par. Arătați că, indiferent de momentul la care se vor opri din desenat cei doi copii, numărul total de steluțe desenate de Ana nu poate fi egal cu numărul total de steluțe desenate de Barbu.

**Gazeta Matematică****Subiectul IV.**

Determinați numerele naturale de forma  $\overline{abc}$  care verifică relația  $\overline{ab} \cdot (b^2 + c^2) = 2014$

**Gazeta Matematică****Notă.**

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Timp de lucru 2 ore.

Propunători: Todoran Nicoleta, Secoleanu Daniela, Ginta Florica.

**S.S.M.R - FILIALA MUREȘ****Olimpiada de matematică****Faza locală****14.02.2014****Clasa a VI-a****Subiectul I.**

Arătați că numărul  $a = n^{65} - n^{13}$  se divide cu 10, oricare ar fi  $n$  numărul natural.

\*\*\*

**Subiectul II.**

Se consideră numerele raționale pozitive  $x = 1\frac{1}{99} + 2\frac{2}{99} + 3\frac{3}{99} + \dots + 98\frac{98}{99}$  și

$$y = \frac{21}{97} + \frac{2121}{9797} + \frac{212121}{979797}.$$

- Arătați că  $x$  este pătrat perfect.
- Comparați numerele  $x$  și  $y$ .

\*\*\*

**Subiectul III.**

Dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt concurente în  $O$ . Știind că semidreptele  $[OM]$ ,  $[OT]$ ,  $[OR]$ , sunt bisectoarele unghiurilor  $\angle BOD$ ,  $\angle DOM$  și respectiv,  $\angle COB$ , iar  $m(\angle AOM) = 130^\circ$ , calculați:

- $m(\angle ROM)$ ;
- $m(\angle AOD)$ ;
- masura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor  $\angle AOC$  și  $\angle BOR$ .

\*\*\*

**Subiectul IV.**

Demonstrați că, oricare ar fi  $n$  număr natural, numărul  $A = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$  este divizibil cu 17.

**Gazeta matematică****Notă.**

Toate problemele sunt obligatorii.  
 Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.  
 Timp de lucru 2 ore.

Propunători: Bozdog Constantin, Suciu Sorin, Botez Radu.

## S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

## Olimpiada de matematică

Faza locală

14.02.2014

Clasa a VII-a

## Subiectul I

Fie expresia  $A = 53 \cdot \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014} \right)$ .

- a) Să se calculeze valoarea expresiei  $A$ .
- b) Să se demonstreze că  $A$  poate fi scris în forma  $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ , unde suma cifrelor din numerele  $a, b$  și  $c$  este egal cu suma cifrelor din numerele  $d$  și  $e$ .

## Subiectul II

Fie dreptunghiul ABCD. Perpendiculara AM pe BD ( $M \in BD$ ), intersectează BC și DC, respectiv în E și F. Să se arate că  $\frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}$ .

## Subiectul III

În triunghiul ascutitunghic ABC, înălțimea AD este egală cu latura BC. Bisectoarele unghiurilor ADB și ADC intersectează pe AB respectiv AC în M și N. Să se arate că:

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1.$$

## Subiectul IV

Dacă  $a, b, c$  sunt numere naturale impare, iar  $q$  este un număr rațional pozitiv oarecare, arătați că

$$aq^2 + bq + c \neq 0$$

## Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.  
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.  
Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof. Bonta Patricea, Capusan Cornelia, Portik Antal, Andreica Gheorghe

**S.S.M.R - FILIALA MUREȘ****Olimpiada de matematică****Faza locală****14.02.2014****Clasa a VIII-a****SUBIECTUL I**

- a) Aduceți la o formă mai simplă expresia  $(5 + 4)(5^2 + 4^2)(5^4 + 4^4)(5^8 + 4^8) \dots (5^{512} + 4^{512})$ .
- b) Arătați că:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{29}{\sqrt{210}} \geq 28$$

**SUBIECTUL II**

Demonstrați ca oricare ar fi numerele reale pozitive  $x, y, z$  are loc inegalitatea:

$$2xy(2x + y) + 6xz(2x + 3z) + 3yz(y + 3z) \geq 36xyz$$

**SUBIECTUL III**

Fie cubul ABCDA'B'C'D', Q centrul feței BCC'B' și P mijlocul muchiei (AB). Fie  $DM \perp PC$ ,  $M \in PC$ . Arătați că:

- a) dreapta DM conține mijlocul segmentului (BC);
- b)  $QM \perp PC$ .

**SUBIECTUL IV**

Se consideră triunghiul ABC în care D este mijlocul segmentului BC. Dacă E este mijlocul segmentului AD, F este mijlocul segmentului BE, iar G este punctul de intersecție a dreptelor AB și CF, calculați  $\frac{AG}{AB}$ .

**Gazeta matematică****Notă.**

Toate problemele sunt obligatorii.  
 Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.  
 Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof.Stoica Angela, Curta Doina, Danciu Alin, Gînta Vasile

**S.S.M.R - FILIALA MUREȘ****Olimpiada de matematică****Faza locală****14.02.2014****Clasa a IX-a****Problema 1:**

Calculați:  $\left[\frac{1^2}{2}\right] + 2^1 \cdot \left[\frac{2^2}{3}\right] + 2^2 \cdot \left[\frac{3^2}{4}\right] + \dots + 2^{n-1} \cdot \left[\frac{n^2}{n+1}\right]$ .

**Problema 2:**

Se consideră triunghiul  $ABC$  oarecare. Se duc : mediana  $AL$  corespunzătoare laturii  $[BC]$ , bisectoarea  $LE$  a unghiului  $\widehat{ALC}$ , bisectoarea  $LF$  a unghiului  $\widehat{ALB}$ . ( $E \in AC, F \in AB$ ) Notăm  $EF \cap AL = \{M\}$ . Demonstrați că oricare ar fi punctul  $O$  din plan avem :  $2 \cdot \overline{OM} = \overline{OE} + \overline{OF}$ .

**Problema 3:**

Se consideră numerele reale  $a, b, c$  diferite de  $-1$  cu  $abc=1$ . Arătați că dacă

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{3}{2}, \text{ atunci unul din numerele } a, b, c \text{ este egal cu } 1.$$

**Problema 4**

Aflați  $x > 1$  pentru care  $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = 2014x$ , unde  $[x]$  înseamnă partea întreagă a lui  $x$ , iar  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a lui  $x$ .

**Gazeta Matematică****Notă.**

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof.Hecser Enikő, Pescărus Teodor

## S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

## Olimpiada de matematică

Faza locală

14.02.2014

Clasa a X-a

**Problema 1:**

Calculați suma

$$S = [\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + \dots + [\lg 10^{2014}].$$

**Problema 2:**Determinați funcțiile strict crescătoare  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că:

$$f(xf(y)) = f(x)y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 3:**

Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \cos A + \cos B + \cos C = 3.$$

Gazeta matematică

**Problema 4:**Fie  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  cu  $\operatorname{Re} z_1 \geq 0$  și  $\operatorname{Re} z_2 \geq 0$ . Să se arate că  $|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \geq 0$ .

Gazeta matematică

**Notă.**

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof.Oprica Natalia, prof. Blaga Cristinel

**S.S.M.R - FILIALA MUREȘ****Olimpiada de matematică****Faza locală****14.02.2014****Clasa a XI-a****Problema 1**

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 2}$  astfel încât  $x_2 = 1$ ,  $x_{n+1} = \frac{n^2}{n-1} \cdot x_n$ ,  $n \geq 2$ .

Dacă  $S_n = \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{1}{x_k}$ , să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

**Problema 2**

Se consideră șirul de numere reale  $(a_n)_{n \geq 0}$ , definit prin:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, 13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}}, \forall n \geq 2.$$

Să se arate că șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  este convergent și să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Problema 3**

Fie  $A \in M_n(\mathbf{R})$ , unde  $n$  este impar. Să se arate că dacă  $A^2 = O_n$ , atunci oricare ar fi matricea  $X \in M_n(\mathbf{R})$  cu proprietatea că  $AX = XA$ , au loc inegalitățile:

$$\det(XA + X^2) \geq 0 \geq \det(XA - X^2).$$

**Problema 4**

Fie șirul  $(L_n)_{n \geq 1}$  dat prin  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$  și  $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

a) Să se determine termenul general al șirul  $(L_n)_{n \geq 1}$ .

b) Demonstrați egalitatea  $C_n^0 \cdot L_0^2 - C_n^1 \cdot L_1^2 + \dots + (-1)^n C_n^n \cdot L_n^2 = 2^{n+1} + (-1)^n L_n$ .

Gazeta matematică

**Notă:**

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof.Pop Carmen, György Gabriella

**S.S.M.R - FILIALA MUREȘ****Olimpiada de matematică****Faza locală****14.02.2014****Clasa a XII-a****Problema 1**

Fie mulțimea  $G = (k, \infty) \setminus \{k+1\}, k > 0$ , pe care se definește legea  $*$  astfel încât:

$$\log_a[(x * y) - k] = \log_a(x - k) \cdot \log_a(y - k), \forall x, y \in G, a > 0, a \neq 1.$$

- Să se determine numărul perechilor de numere întregi  $(k, a)$  pentru care elementul neutru al legii  $*$  este  $e = 2014$ .
- Să se verifice dacă legea  $*$  este asociativă și să se determine elementul  $x \in G$  care verifică relația  $x = x'$ , în cazul  $k=a+1=1005$ . (s-a notat cu  $a'$  simetricul lui  $a$  în raport cu legea  $*$ ).

**Problema 2**

Fie  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \cdot e^{-x}$ . Să se determine primitiva  $F$  a lui  $f$  pentru care  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

**Matlap****Problema 3**

Pentru  $a \in \mathbf{R}$  și  $b \in \mathbf{R}^*$  considerăm funcția  $f_{a+bi} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ .  $f_{a+bi}(x + iy) = x + (a + ib)y$  și notăm

$$G = \{f_{a+bi} \mid a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}^*\}.$$

- Să se demonstreze că  $G$  este un grup necomutativ în raport cu compunerea funcțiilor.
- Considerăm și grupul  $H = \{f_{a,b} \mid a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}\}$ , unde  $f_{a,b} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_{a,b}(x) = ax + b$  și unde operația este de asemenea compunerea funcțiilor.

Să se demonstreze că aplicația  $h : H \rightarrow G$ ,  $h(f_{a,b}) = f_{\frac{b}{a} + \frac{1}{a}i}$  este un izomorfism de grupuri.

**Problema 4**

Să se determine funcția derivabilă  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  știind că  $f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} + e^x$ , pentru orice  $x > 0$  și  $f(1) = e$ .

Gazeta Matematica

Subiectele au fost selectate de: Astalus Niculina, Ilie Stefan, Matefi Istvan