



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

18 februarie 2017

Clasa a VII-a

1. Fie numerele $x = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2011} \cdot \frac{2013}{2015}$ și $y = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \dots \cdot \frac{2011}{2013} \cdot \frac{2015}{2017}$.

a) Arătați că $x < y$.

b) Găsiți primele trei zecimale ale numărului x^2 .

2. a) Arătați că oricare ar fi numerele reale a, b, c avem:

$$|a + b| + |a + c| \geq |b - c|$$

b) Demonstrați că pentru orice număr real x avem:

$$|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 2016| \geq 1008^2.$$

3. Fie $ABCD$ un paralelogram și $M \in (AB), P \in (CD)$ astfel încât $AM = CP$. Din punctele M și P se construiesc perpendicularele QM pe AB și NP pe $CD, Q \in AD, N \in BC$.

a) Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) Care trebuie să fie poziția punctelor M și P astfel încât $MNPQ$ să fie dreptunghi.

4. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și $AB = AC$, iar M un punct în interiorul său astfel încât $m(\sphericalangle MBA) = 15^\circ$ și $m(\sphericalangle MCA) = 30^\circ$.

a) Aflați măsura unghiului MAC .

b) Dacă $AQ \perp BM, Q \in BM$, aflați valoarea raportului $\frac{AQ}{BM}$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.

Soluții și bareme orientative
Clasa a VII-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) $\frac{n-2}{n} < \frac{n}{n+2}, \forall n \in N^*$ (1p)

Luând $n=3, 7, 11, \dots, 2011, 2015$ și înmulțind inegalitățile găsim $x < y$. (2p)

b) $xy = \frac{1}{2017}$. (1p)

$x^2 < xy = \frac{1}{2017} < \frac{1}{10^3}$. (2p)

Primele trei zecimale ale numărului x^2 sunt egale cu 0. (1p)

2. a) Folosind proprietățile modulului deducem:

$|a + c| = |-a - c|$ și $|a + b| + |a + c| = |a + b| + |-a - c|$. (2p)

Dar $|a + b| + |-a - c| \geq |a + b - a - c| \Rightarrow |a + b| + |a + c| \geq |b - c|$. (2p)

b) Folosind punctul a) deducem:

$|x + 1| + |x + 1009| \geq |1009 - 1|$

$|x + 2| + |x + 1010| \geq |1010 - 2|$

.....
 $|x + 1008| + |x + 2016| \geq |2016 - 1008|$

$\Rightarrow |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 2016| \geq \underbrace{1008 + 1008 + \dots + 1008}_{1008 \text{ termeni}} \Rightarrow$ (2p)

$|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 2016| \geq 1008^2, \forall x \in \mathbb{R}$. (1p)

3. a) Din $AM = CP$ și $\widehat{MAQ} = \widehat{NCP}$ se deduce că $\triangle MAQ \equiv \triangle NCP$ (CU) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow QM = PN$, (1).

(1p)

Din $QM \perp AB$ și $AB \parallel DC \Rightarrow MQ \perp CD$, dar $NP \perp CD$, $MQ \parallel NP$, (2).

(2p)

Din (1) și (2) rezultă că $MNPQ$ este paralelogram.

(1p)

b) Considerăm problema rezolvată, deci $\widehat{MQP} = 90^\circ \Rightarrow MQ \perp QP$, dar $MQ \perp CD$, deci $Q \in CD$. Dar $Q \in AD$, deci $AD \cap CD = \{Q\}$, iar $AD \cap CD = \{D\} \Rightarrow Q \equiv D$.

(1p)

Deci dacă $MNPQ$ este dreptunghi, atunci M este piciorul perpendicularei din D pe AB și analog P este piciorul perpendicularei din B pe DC , unde $N \equiv B$.

(2p)

4. a) Dacă $m(\sphericalangle MBA) = 15^\circ$, atunci $m(\sphericalangle MBC) = 30^\circ$. Din $m(\sphericalangle MCA) = 30^\circ$ rezultă $m(\sphericalangle MCB) = 15^\circ$.

(1p)

Fie CP bisectoarea unghiului ACM , $P \in BM$. Atunci $m(\sphericalangle PCB) = 30^\circ \Rightarrow$

$\triangle CPB$ este isoscel cu $CP = BP \Rightarrow m(\sphericalangle CPB) = 120^\circ$. (1p)

Din $AB=AC$, $CP=BP$ și AP latură comună $\Rightarrow \triangle APC \equiv \triangle APB \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle CPA) = m(\sphericalangle APB) = 120^0 \Rightarrow m(\sphericalangle CAP) = 45^0. \quad (1) \quad (1p)$$

Din $m(\sphericalangle CPA) = m(\sphericalangle CPB)$, $m(\sphericalangle ACP) = m(\sphericalangle PCM)$ și CP latură comună $\Rightarrow \triangle CPA \equiv \triangle CPM \Rightarrow$

$$\Rightarrow AP = PM \Rightarrow \triangle APM \text{ este isoscel} \Rightarrow m(\sphericalangle PMA) = m(\sphericalangle PAM) = 30^0. \quad (2) \quad (1p)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow m(\sphericalangle MAC) = 75^0. \quad (1p)$$

$$\text{b) } \triangle AQM \text{ este dreptunghic și } m(\sphericalangle AMQ) = 30^0 \Rightarrow AQ = \frac{AM}{2}, \quad (1p)$$

$$\triangle AMB \text{ este isoscel, cu } AM=MB \Rightarrow \frac{AQ}{BM} = \frac{1}{2}. \quad (1p)$$