OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
Barem, clasa a XI– a

1. Logaritmăm relaţia dată: $n\log_a b = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n$ .... 2p.
Aplicăm inegalitatea mediilor .... 1p.
Ţinând cont că expresiile care intervin sunt strict pozitive obţinem:
$$\log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n \ge n\cdot\sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \cdots \cdot \log_a x_n}$$ ..... 2p.
Finalizare.. 2p.

2. a) Aplicăm inegalitatea lui Bernoulli pentru un $k \in N^*$, $n \ge 2$:............. 1p
$$\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^n \ge 1+n\cdot\frac{k-1}{n} \Leftrightarrow \left(1+\frac{k-1}{n}\right)^n \ge k \Leftrightarrow \frac{n+k-1}{n} \ge \sqrt[n]{k} \Leftrightarrow$$ 1p
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{k}} \ge \frac{n}{n+k-1}.$$ .... 1p.

Altfel: $\sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{k\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{k-1-szer}} \le \frac{k+n-1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{k}} \ge \frac{n}{n+k-1}.$

b) $$\frac{1}{\sqrt[n]{k}} \ge \frac{n}{n+k-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{k}\cdot(n+k)} \ge \frac{n}{(n+k-1)\cdot(n+k)} \Leftrightarrow$$ 2p
$$\frac{1}{\sqrt[n]{k}\cdot(n+k)} \ge n\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right).$$ 1p
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{k}\cdot(n+k)} \ge n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right) = n\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}.$$ .... 1p.

3. a) Din: $|z|^2 = z\cdot\bar{z} \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1},\ \bar{z}_2 = \frac{16}{z_2}\ \ \bar{z}_3 = \frac{25}{z_3}$ 2p
$$0 = \overline{z_1+z_2+z_3} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3 = \frac{9}{z_1}+\frac{16}{z_2}+\frac{25}{z_3}$$ .... 2p.

b) Din a) obţinem $0 = 9z_2z_3 + 16z_1z_3 + 25z_1z_2$ 1p
Punem $z_3 = -z_1 - z_2$, obţinem: $16z_1^2 + 9z_2^2 = 0$. .... 2p.

4. a) Ecuaţia $\sqrt{x}+3x = 4x^2$, are cel mult 2 soluţii, membrul stâng fiind o funcţie concavă, iar membrul drept o funcţie strict convexă. 1p
Obţinem soluţiile: $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$. .... 1p.

b) Injectivitate 2p
Surjectivitate .... 1p.

c) Considerand funcţia bijectivă $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $h(x)=4x^2$, relaţia dată devine:
$g\circ f = h$ 1p
Atunci $f = g^{-1}\circ h$, este bijecţie ca o compusă a două bijecţii. .... 1p.