



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală - 15.02.2014

Clasa a V-a

- 1) Aflați valoarea lui x din egalitatea:
 $[(x + 2013) \cdot 2013 - 2013] : 2013 = 2014$

Supliment GM septembrie 2013

- 2) Determinați ultima cifră nenulă a numărului a , unde $a = 2^{102} \cdot 5^3 \cdot 3^{20}$.

- 3) Să se compare numerele $a = 5^{205} - 3 \cdot 5^{204} - 3^2 \cdot 5^{203} - 4 \cdot 5^{202}$ și
 $b = 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{302}$.

GM 11/2013

- 4) Numerele naturale a, b, c ($0 < a < b < c$) au suma egală cu 63. Știind că la împărțirea sumei numerelor b și c prin a se obțin câtul 2 și restul 15, iar unul dintre numerele a, b, c are cifrele identice, să se determine cele trei numere.

Propunător: profesor Angela Dorneanu, Liceul Teoretic Emil Botta Adjud

SUCCES!

NOTĂ: Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a V-a

Soluții

$$(x + 2013) \cdot 2013 - 2013 = 2014 \cdot 2013 \Rightarrow (x + 2013) \cdot 2014 = 2014 \cdot 2013 + 2013 \Rightarrow$$

$$1) (x + 2013) \cdot 2013 = 2013 \cdot (2014 + 1) \Rightarrow (x + 2013) \cdot 2013 = 2013 \cdot 2015 \Rightarrow$$

$$x + 2013 = (2013 \cdot 2015) : 2013 \Rightarrow x + 2013 = 2015 \Rightarrow x = 2015 - 2013 \Rightarrow x = 2$$

$$2) a = 2^{99} \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 3^{20} \Rightarrow a = 2^{99} \cdot 10^3 \cdot 3^{20} \Rightarrow a = 2^{99} \cdot 3^{20} \cdot 1000, \text{ deci ultimile trei cifre ale lui}$$

„a” sunt 0,0,0 și deoarece nu mai putem obține cifra 0, ultima cifra nenulă a lui „a” va fi ultima cifră a produsului $2^{99} \cdot 3^{20}$.

Deoarece ultima cifră a puterilor lui 2 se repetă din 4 în 4, iar restul împărțirii lui 99 la 4 este 3 rezultă că ultima cifră a lui 2^{99} este 8.

Deoarece ultima cifră a puterilor lui 3 se repetă din 4 în 4, iar 20 este multiplu de 4, rezultă că ultima cifră a lui 3^{20} este 1.

Deci ultima cifră nenulă a lui „a” este 8.

$$3) a = 5^{202} \cdot (5^3 - 3 \cdot 5^2 - 3^2 \cdot 5^1 - 4 \cdot 1)$$

$$a = 5^{202} \cdot (125 - 3 \cdot 25 - 9 \cdot 5 - 4) = 5^{202} \cdot 1 = 5^{202}$$

$$3b = 3^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{302} + 2 \cdot 3^{303}$$

$$3b - b = 2 \cdot 3^{303} + 3^2 - (3 + 2 \cdot 3) \Rightarrow$$

$$2b = 2 \cdot 3^{303} \Rightarrow b = 3^{303}$$

$$a = 5^{2 \cdot 101} = (5^2)^{101} = 25^{101}$$

$$b = 3^{3 \cdot 101} = (3^3)^{101} = 27^{101}$$

Deci $b > a$

$$4) \text{ Din Teorema Impartirii cu Rest: } b+c=2a+15.$$

Din enunț $a+b+c=63 \Rightarrow a+(2a+15)=63 \Rightarrow 3a+15=63 \Rightarrow 3a=48 \Rightarrow a=16$, deci unul dintre numerele b sau c are cifrele egale.

Inlocuind $\Rightarrow 2 \cdot 16 + 15 \Rightarrow b + c = 47$.

Știind că $b > a$ și $a = 16 \Rightarrow b = 22$ sau $b = 33$ sau $b = 44$.

Dacă $b = 22 \Rightarrow c = 47 - 22 \Rightarrow c = 25$

Dacă $b = 33 \Rightarrow c = 47 - 33 = 14$ care nu convine pentru că $b < c$.

Dacă $b = 44 \Rightarrow c = 47 - 44 \Rightarrow c = 3$ care nu convine pentru că $b < c$.

Dacă $c = 44 \Rightarrow b = 3$ nu convine pentru că $b > a$

Dacă $c = 33 \Rightarrow b = 14$ nu convine pentru că $b > a$

Dacă $c = 22 \Rightarrow b = 25$ nu convine pentru că $b < c$.

Deci soluția problemei este: $a = 16$, $b = 22$, $c = 25$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a V-a

Bareme

- 1) $(x + 2013) \cdot 2013 - 2013 = 2014 \cdot 2013$ 2p
 $(x + 2013) \cdot 2013 = 2014 \cdot 2013 + 2013$ 1p
 $2014 \cdot 2013 + 2013 = 2013 \cdot (2014 + 1) = 2013 \cdot 2015$ 1p
 $(x + 2013) \cdot 2013 = 2013 \cdot 2015 \Rightarrow x + 2013 = (2013 \cdot 2015) : 2013$ 1p
 $x + 2013 = 2015$ 1p
 $x = 2$ 1p
- 2) Evidențierea produsului $2^3 \cdot 5^3 = 1000$ 2p
 Ultima cifră a lui 2^{99} este 8.....2p
 Ultima cifră a lui 3^{20} este 1.....2p
 Finalizare : ultima cifră a lui „a” este 8.....1p
- 3) $a = 5^{202}$ 2p
 $b = 3^{303}$ 2p
 $a = 25^{101}$ 1p
 $b = 27^{101}$ 1p
 Finalizare $a < b$ 1p
- 4) $a+b+c+63$ 1p
 Teorema Împărțirii cu Rest: $D = \hat{I} \cdot C + R, R < I .. \Rightarrow b+c=2a+15$1p
 Înlocuire în prima relație: $a+(2a+15)=63.. \Rightarrow a=16$1p
 $b+c=47$ și b sau c pot fi 22, 33, 44.....1p
 Justificare pentru unicitatea soluției : $a=16, b=22, c=25$3p