OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-VRANCEA

08.02.2020

CLASA A V-A

1. Fie $A=3\cdot 8^{51}\cdot 5^{75}+2^{151}\cdot 5^{77}+2^{77}\cdot 10^{76}-13\cdot 20^{75}$.

a) Să se arate că 2020 divide *A*.

b) Aflați cel mai mic număr natural nenul *x* cu proprietatea că $x\cdot A$ este pătrat perfect.

Rezolvare:

a) $A=3\cdot 2^{153}\cdot 5^{75}+2^{151}\cdot 5^{77}+2^{77}\cdot (2\cdot 5)^{76}-13\cdot (2^2\cdot 5)^{75}$ **1p**

$A=3\cdot 2^{153}\cdot 5^{75}+2^{151}\cdot 5^{77}+2^{153}\cdot 5^{76}-13\cdot 2^{150}\cdot 5^{75}$ **1p**

$A=2^{150}\cdot 5^{75}\cdot (3\cdot 2^3+2\cdot 5^2+2^3\cdot 5-13)$ **1p**

$A=2^{150}\cdot 5^{75}\cdot 101$ **1p**

$A=2^{148}\cdot 5^{74}\cdot 2020 \Rightarrow 2020 \mid A$ **1p**

b) $x\cdot A=x\cdot 2^{150}\cdot 5^{75}\cdot 101$

cel mai mic număr natural nenul *x* cu proprietatea că $x\cdot A$ este pătrat perfect este **2p**

$x=5\cdot 101$ obținându-se $x\cdot A=2^{150}\cdot 5^{76}\cdot 101^2=(2^{75}\cdot 5^{38}\cdot 101)^2$

2. Să se afle suma numerelor de 3 cifre care împărțite la 22 dau restul 11.

Rezolvare:

$x:22=c$ rest $11 \Rightarrow x=22\cdot c+11$ **1p**

$100\le x\le 999 \Rightarrow 89\le 22c\le 988 \Rightarrow 5\le c\le 44$ **1p**

Sunt 40 numere de 3 cifre care împărțite la 22 dau restul 11 **1p**

$S=(22\cdot 5+11)+(22\cdot 6+11)+...+(22\cdot 44+11)$ **1p**

$S=22\cdot (5+6+...+44)+40\cdot 11$ **1p**

$S=22\cdot \left[(1+2+...+44)-(1+2+3+4)\right]+440$ **1p**

$S=22\cdot (990-10)+440 \Rightarrow S=22000$ **1p**

3. a) Arătați că $2020-2^8$ este pătrat perfect.

b) Arătați că 2020^{2019} poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.

Rezolvare:

a) $2020-2^8=2020-256=1764=42^2$ este pătrat perfect **2p**

b) Din a) avem că $2020=2^8+42^2=16^2+42^2$ **1p**

$2020^{2019}=2020^{2018}\cdot 2020=2020^{2018}\cdot(16^2+42^2)$ **2p**

$2020^{2019}=2020^{2018}\cdot 16^2+2020^{2018}\cdot 42^2$ **1p**

$2020^{2019}=(2020^{1009}\cdot 16)^2+(2020^{1009}\cdot 42)^2$ **1p**

4. Aflați toate numerele $\overline{abcd}$ care verifică simultan condițiile:

i) Numărul $\overline{ab}$ împărțit la numărul $\overline{cd}$ dă câtul și restul egale cu 1;

ii) Numărul $\overline{abc}$ împărțit la numărul d dă câtul 22 și restul 3.

(Gazeta Matematică 11/2019)

Rezolvare:

Din i) $\Rightarrow \overline{ab}=\overline{cd}+1$ și $\overline{cd}>1$ **1p**

Din ii) $\Rightarrow \overline{abc}=d\cdot 22+3$ și $d>3$ **1p**

$\overline{abc}=d\cdot 22+3 \Rightarrow \overline{ab}\cdot 10+c=d\cdot 22+3$ **1p**

$\left(\overline{cd}+1\right)\cdot 10+c=d\cdot 22+3$ **1p**

$100c+10d+10+c=22d+3 \Rightarrow 101c+7=12d$ **1p**

Din $c\geq 1 \Rightarrow 101c+7\geq 108$ și din $d\leq 9 \Rightarrow 12d\leq 108$

se obține că $101c+7=108 \Rightarrow c=1$ și că $12d=108 \Rightarrow d=9>3$ **1p**

Atunci $\overline{cd}=19 \Rightarrow \overline{ab}=20 \Rightarrow \overline{abcd}=2019$ **1p**