

Clasa a V - a

Problema 1.

a) Scrie numărul 2017 ca suma dintre un număr care este multiplul lui 3 și un număr care este multiplul lui 7.

Eugenia Vlad, Călărași

b) Găsește două numere naturale, a și b , cu proprietatea $a^2 + b^3 = 2017$.

Predoiu Eugen, Călărași

c) Găsește două numere naturale, a și b , cu proprietatea $a^2 - b^3 = 2017$.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

d) Dacă n este un număr natural par care nu este multiplu lui 4, atunci determină ultima cifră a numărului 2017^n .

Victor Tudor, Jegălia

Soluție: a) de exemplu $2017 = 7 + 2010 = 7 \cdot 1 + 3 \cdot 670$; b) de exemplu $2017 = 289 + 1728 = 17^2 + 12^3$; c) de exemplu $2017 = 2025 - 8 = 45^2 - 2^3$; d) există k număr natural astfel încât $n = 4k + 2$; dacă n este multiplu lui 4, atunci ultima cifră a numărului 7^n este 1; ultima cifră a numărului 2017^n este 9 pentru că este egală cu ultima cifră a numărului 7^2 .

Problema 2.

Un constructor a primit comanda pentru un gard din cărămizi, cu următoarele instrucțiuni:

- Folosiți pentru construcție modelul din figura 1.
- Cărămizile au dimensiunile următoare: 208mm lungime, 104mm lățime, 52mm înălțime (vezi figura 2).
- Gardul trebuie să aibă, cel puțin, 200mm lățime, 10 metri lungime și 520mm înălțime.
- Pentru construcție se folosesc numai cărămizi întregi.
- Folosiți cât mai puține cărămizi.

Câte cărămizi trebuie să folosească constructorul?

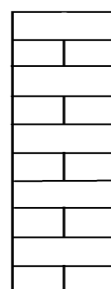


figura 1

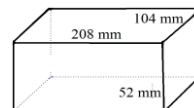
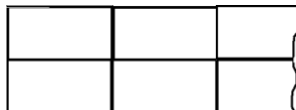


figura 2
Corina Baci, Olanda

Soluție: Dimensiunile minime ale gardului (înălțime, lățime și lungime) se realizează dacă se folosesc 10 straturi de cărămizi dispuse alternativ, astfel: un strat cu $49 \cdot 2 = 98$ cărămizi,



apoi un strat cu $98 \cdot 1 = 98$ cărămizi;



pentru construcția gardul se folosesc $10 \cdot 98 = 980$ cărămizi

Problema 3.

Ana are n cutiute identice cu bomboane de ciocolată și fiecare cutiuță conține 5 bomboane. De ziua ei Ana a intenționat să împartă toate bomboane ei, în mod egal, celor 7 prieteni invitați la petrecere și a observat că o să-i rămână 4 bomboane. La petrecere câțiva dintre prietenii ei au venit însoțiți. Ana a trebuit să împartă toate bomboanele, în mod egal, la 11 copii și i-au mai rămas 8 bomboane. Care este cel mai mică valoarea posibilă a lui n ?

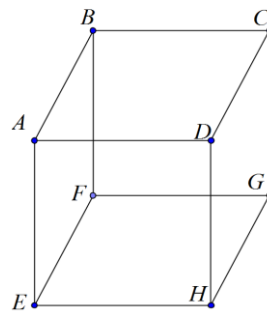
Adriana Olaru, Călărași

Soluție: Există m, k numere naturale astfel încât $5n = 7m + 4$ și $5n = 11k + 8 \Rightarrow 5n + 3 = 7(m + 1)$ și

$5n + 3 = 11(k + 1) \Rightarrow 5n + 3$ este multiplul lui 77 $\Rightarrow 5n$ este unul dintre numerele 74, 151, 228, 305, ...;

rezultă că cea mai mică valoare posibilă a lui n este 61.

Problema 4. Un roboțel se deplasează numai pe muchiile cubului din figura alăturată ca să ajungă dintr-un vârf în altul. Drumul parcurs se numește *traseu corect* dacă nu conține muchii care sunt traversate de mai multe ori. Numărul muchiilor parcurse, pe un *traseu corect*, se numește *lungime*. De exemplu: ca să ajungă din vârful A în vârful D , pe un *traseu corect* cu *lungimea* 5, se poate deplasa pe muchiile AB, BF, FE, EA și AD . Se cere:



a) Dă exemplu de un *traseu corect* de la vârful A în vârful D , care să aibă *lungimea* egală cu 9.

b) Câte *trasee corecte*, de *lungime* 3, sunt de la vârful A la vârful G ?

c) Demonstrează că nu există un *traseu corect*, cu *lungimea* egală cu un număr par, de la vârful A în vârful E .

Viorica Stoianovici, Călărași

Soluție: a) $AD, DH, HE, EA, AB, BF, FG, GC, CD$; b) $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$; c) *traseele corecte*, cu *lungimea* egală cu 2, care pleacă din vârful A ajung numai în vârfurile C, F și H ; orice *traseu corect*, cu *lungimea* egală cu 2, care pleacă din vârful C ajunge numai în vârfurile A, F și H ; orice *traseu corect*, cu *lungimea* egală cu 2, care pleacă din vârful F ajunge numai în vârfurile A, C și H ; orice *traseu corect*, cu *lungimea* egală cu 2, care pleacă din vârful H ajunge numai în vârfurile A, C și F ; rezultă că pe un *traseu corect*, cu *lungimea* egală cu un număr par, de la vârful A se ajunge numai în vârfurile A, C, F și H .

Clasa a VI - a

Problema 1. Un număr natural se numește $5d$ dacă are exact 5 divizori.

a) Găsește cel mai mic număr $5d$ de două cifre.

b) Demonstrează că $64^4 > 16 \cdot 10^6$.

c) Câte numere $5d$ sunt mai mari decât $16 \cdot 10^6$ și mai mici decât 10^8 ?

Diana Stanciu, Oltenița

Soluție: a) $2^4 = 16$; b) $64^4 = (2^6)^4 = 2^{24} = 2^4 \cdot (2^{10})^2 = 16 \cdot 1024^2 > 16 \cdot 1000^2 = 16 \cdot (10^3)^2 = 16 \cdot 10^6$;

c) un număr natural n este $5d$ dacă și numai dacă există un număr prim p cu proprietatea $n = p^5$; $61^4 = 13845841 < 16000000 = 16 \cdot 10^6$; numerele prime mai mari decât 64 și mai mici decât 100 sunt: 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; dacă x este unul dintre aceste numere, atunci $64 < x < 100 \Rightarrow \Rightarrow 64^4 < x^4 < 100^4 \Rightarrow 16 \cdot 10^6 < x^4 < 10^8$; rezultă că sunt 7 numere $5d$ mai mari decât $16 \cdot 10^6$ și mai mici decât 10^8 .

Problema 2.

Referitor la numărul de pagini al unui volum din trilogia *Stăpânul inelelor* de J. R. R. Tolkien, se pot enunța următoarele propoziții adevărate:

p : „Numărul paginilor volumului este mai mare decât 500 și mai mic decât 600”; q : „Numărul paginilor volumului are exact 8 divizori naturali.” r : „Numărul de pagini al ultimului capitol este cu o unitate mai mare decât numărul cu al cărui pătrat este numerotată prima pagină a acestui capitol.” Câte pagini are volumul?

Soluție: dacă notăm cu $a+1$ numărul paginilor ultimului capitol, iar cu n numărul paginilor cărții, din propoziția r rezultă că $n = a^2 + a$ sau $n = a \cdot (a+1)$; $21 \cdot 22 = 462$, $22 \cdot 23 = 506$, $23 \cdot 24 = 552$, $24 \cdot 25 = 600$; $500 < n < 600 \Rightarrow n \in \{506, 552\}$; $506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$, $552 = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$; numărul care are 8 divizori este 506; cartea are 506 pagini.

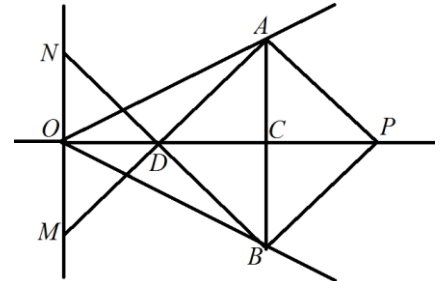
Problema 3.

Semidreapta $[OX]$ este bisectoarea unghiului propriu $\angle AOB$, dreapta d este perpendiculară pe dreapta OX și $O \in d$. Dacă $[OA] \equiv [OB]$, $AB \cap OX = \{C\}$, $D \in (OC)$, $AD \cap d = \{M\}$ și $BD \cap d = \{N\}$, atunci:

- a) Demonstrează că dacă un punct P aparține dreptei OX , atunci $[PA] \equiv [PB]$.
 b) Demonstrează că $[AM] \equiv [BN]$.

Sorin Furtună, Călărași

Soluție: a) $\triangle AOC \equiv \triangle BOC$ (LUL) (i) $\Rightarrow [AC] \equiv [BC]$; I. dacă $P = C$, concluzia este evidentă; II. $P \neq C$ din (i) rezultă $\angle ACP \equiv \angle BCP \Rightarrow \triangle ACP \equiv \triangle BCP$ (LUL) (i) $\Rightarrow [AP] \equiv [BP]$.
 b) $\angle AOC \equiv \angle BOC$ și $MN \perp OC \Rightarrow \angle AOM \equiv \angle BON$ (i); din a) $\Rightarrow OA = OB$ (ii) și $DA = DB \Rightarrow \triangle AOD \equiv \triangle BOD$ (LLL) $\Rightarrow \angle OAD \equiv \angle OBD$, (i) și (ii) $\Rightarrow \triangle AOM \equiv \triangle BON$ (ULU) $\Rightarrow [AM] \equiv [BN]$.

**Problema 4.**

- a) Găsește trei numere naturale n, m, k pentru care sunt adevărate, simultan, egalitățile $E_1: n^3 + n = k + nm$ și $E_2: k^2 + 1 = mk + n$.
 b) Determină toate numerele naturale n, m, k pentru care sunt adevărate, simultan, egalitățile $E_1: n^3 + n = k + nm$ și $E_2: k^2 + 1 = mk + n$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție: a) de exemplu $n = m = k = 1$; b) (i) $k = 0 \Rightarrow E_2 \Leftrightarrow n = 1 \Rightarrow E_1 \Leftrightarrow m = 2$; (ii) $k \neq 0$, $E_1 \Leftrightarrow n[n^2 - (m-1)] = k \Rightarrow n|k$ (1); $E_2 \Leftrightarrow k(k-m) = n-1 \Rightarrow k|n-1$ (2); din (1) și (2) rezultă $n|n-1 \Rightarrow n=1 \Rightarrow E_1 \Leftrightarrow k+m=2$ și $E_2 \Leftrightarrow k=m \Rightarrow k=m=1$; soluțiile sunt $n=1, m=2, k=0$ și $n=m=k=1$.

Clasa a VII - a**Problema 1.**

Se consideră numerele raționale $A = \frac{1}{1^2} - \frac{3}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{3}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{3}{6^2} + \dots + \frac{1}{2017^2} - \frac{3}{2018^2}$ și

$$B = \frac{1}{1010^2} + \frac{1}{1011^2} + \dots + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}.$$

- a) Demonstrează că $A = B$.
 b) Determină primele trei zecimale ale lui B .

Relu Ciupea, Oltenița

Soluție: a) $\frac{1}{1^2} - \frac{3}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{1}{2017^2} - \frac{3}{2018^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2} - 4 \cdot \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2018^2} \right) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2} - \left(\frac{2^2}{2^2} + \frac{2^2}{4^2} + \frac{2^2}{6^2} + \dots + \frac{2^2}{2018^2} \right) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2018^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1009^2} \right) = \frac{1}{1010^2} + \frac{1}{1011^2} + \dots + \frac{1}{2018^2} \Rightarrow A = B$; b) $\frac{1}{2018^2}$ este cel mai mic termen al sumei $\frac{1}{1010^2} + \frac{1}{1011^2} + \dots + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}$, iar $\frac{1}{1010^2}$ este cel mai mare termen al aceleiași sume, care are 1009 termeni, rezultă:

$$\frac{1009}{2018^2} < B < \frac{1009}{1010^2} \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 2018} < B < \frac{1009}{1010^2} < \frac{1009}{1009 \cdot 1010} \Rightarrow \frac{1}{5000} < \frac{1}{4036} < B < \frac{1}{1010} < \frac{1}{1000};$$

0,0002 < B < 0,001 de unde rezultă că primele trei zecimale ale lui B sunt egale cu 0.

Problema 2.

Determină toate numerele naturale n , cu proprietatea că numărul $\sqrt{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2017}}$ este natural.
Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: $\sqrt{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2017}} \Leftrightarrow \exists a, b, k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n+1} = a$, $\sqrt{n+2017} = b$ și $a+b=k^2 \Leftrightarrow (b+a)(b-a) = 2016$ și $a+b=k^2$; $2016 = 1^2 \cdot 2016 = 2^2 \cdot 504 = 3^2 \cdot 224 = 4^2 \cdot 126 = 12^2 \cdot 14$ și $a+b > b-a \Rightarrow a+b=144$ și $b-a=14 \Rightarrow b=79$ și $a=65 \Rightarrow n=4224$.

Problema 3.

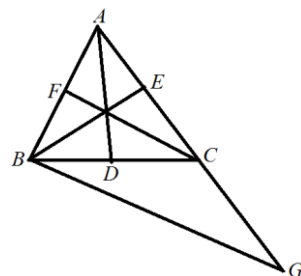
Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și punctul $G \in (AC)$ astfel încât $C \in (AG)$ iar $[CG] \equiv [AB]$. Dacă bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, semidreapta (AD) ($D \in (BC)$), mediana (BE) , $E \in (AC)$ și înălțimea (CF) , $F \in (AB)$ sunt concurente, atunci demonstrează că $GB \perp AB$.

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: din teorema lui Ceva rezultă $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{DC}{DB}$ (1);

din teorema bisectoarei rezultă $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{CG}$ (2); din (1) și (2) rezultă

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{CG} \Rightarrow FC \parallel BG \Rightarrow FC \perp AB.$$

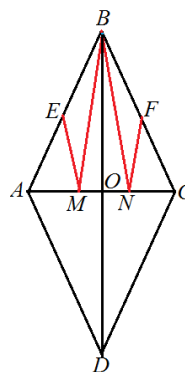


Problema 4.

Se consideră paralelogramul $ABCD$, punctele E și F sunt mijloacele laturilor (AB) și (BC) , punctele M și N aparțin diagonalei (AC) astfel încât M este situat pe segmentul (AN) și $[AM] \equiv [MN] \equiv [NC]$. Dacă $[EM] \equiv [FN]$, atunci demonstrează că $ABCD$ este romb.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție: EM linie mijlocie în triunghiul $ABN \Rightarrow BN = 2EM$; FN linie mijlocie în triunghiul $BCM \Rightarrow BM = 2FN$ (i); din $[EM] \equiv [FN]$, (i) și (ii) rezultă că triunghiul MBN este isoscel; $BO \perp MN$, $O \in (MN) \Rightarrow OM = ON \Rightarrow OA = OC$; în concluzie, paralelogramul $ABCD$ este romb pentru că are diagonalele perpendiculare.



Clasa a VIII - a

Problema 1.

Dacă x, y, z sunt numere reale nenule cu proprietatea: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$, atunci:

a) $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$;

$$\text{b)} \frac{1}{x^{2017}} + \frac{1}{y^{2017}} + \frac{1}{z^{2017}} = \frac{1}{x^{2017} + y^{2017} + z^{2017}};$$

c) demonstrează că dacă x, y, z sunt numere reale, $x \neq y, y \neq z, z \neq x$ și $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$,

atunci $\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0$.

Relu Ciupea, Oltenița

Soluție: a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0$; b) $(x+y)(y+z)(z+x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -y \text{ sau } y = -z \text{ sau } z = -x; \text{ dacă } x = -y \Rightarrow x^{2017} = -y^{2017} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^{2017}} + \frac{1}{y^{2017}} + \frac{1}{z^{2017}} = \frac{1}{x^{2017} + y^{2017} + z^{2017}} \Leftrightarrow \frac{1}{z^{2017}} = \frac{1}{z^{2017}} \text{ adevărat; asemănător se demonstrează}$$

celelalte două cazuri; c) din a) $\Rightarrow x = -y$ sau $y = -z$ sau $z = -x$; presupunem $x = -y \Rightarrow$

$$\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0 \Leftrightarrow z^2 = 5y^2 \text{ (1); } \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0 \Leftrightarrow (y^2 - z^2)^2 = 16y^4, \text{ adevărat}$$

din (1); simetria egalităților asigură că implicația rămâne adevărată dacă $y = -z$ sau $z = -x$

Notă: Implicația: $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0$, este adevărată și în

absența ipotezei $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$. Demonstrație:

$$\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0 \text{ (ip); (ip)} \Leftrightarrow \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)(y-z)} + \frac{z}{(x-y)(y-z)} = 0 \text{ (1);}$$

$$\text{(ip)} \Leftrightarrow \frac{x}{(z-x)(y-z)} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)(z-x)} = 0 \text{ (2);}$$

$$\text{(ip)} \Leftrightarrow \frac{x}{(y-z)(x-y)} + \frac{y}{(z-x)(x-y)} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0 \text{ (3);}$$

Din (1), (2) și (3) rezultă:

$$\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} + \frac{x+y}{(z-x)(y-z)} + \frac{y+z}{(x-y)(z-x)} + \frac{z+x}{(y-z)(x-y)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0$$

Problema 2.

a) Demonstrează că $\sqrt{\frac{1009}{1008}} + \sqrt{\frac{2017}{2018}} > 2$.

b) Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația $[2016x + \{x\}] = 2017$.

(Pentru un număr real a , $[a]$ este partea întreagă a lui a , iar $\{a\}$ este partea fracționară a lui a .)

Gabriela Ruse, Călărași

Soluție: a) $\sqrt{\frac{1009}{1008}} + \sqrt{\frac{2017}{2018}} = \sqrt{\frac{2018}{2016}} + \sqrt{\frac{2017}{2018}} > \sqrt{\frac{2018}{2017}} + \sqrt{\frac{2017}{2018}} = x + \frac{1}{x}$, unde $x = \sqrt{\frac{2018}{2017}}$ (1);

$$0 < x < 1 \text{ (2); } x + \frac{1}{x} > 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0, \text{ inegalitate adevărată pentru orice număr real } x, x \neq 1 \text{ (3); din}$$

(1) și (3) rezultă $\sqrt{\frac{1009}{1008}} + \sqrt{\frac{2017}{2018}} > 2$. b) Notăm $[x] = k, k \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} = t, t \in [0; 1)$. Atunci $x = k + t$, iar

ecuația devine $2016k + [2017t] = 2017$. Analizăm cazurile $t \in \left[\frac{n}{2017}; \frac{n+1}{2017}\right), n = \overline{0, 2016}$. Ecuația

devine $2016k + n = 2017$, $k \in \mathbb{Z}$, implică $n = 1$. Soluția ecuației este $1 + t$, $t \in \left[\frac{1}{2017}; \frac{2}{2017} \right)$.

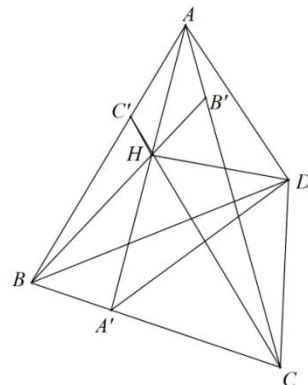
Problema 3.

Dacă A, B, C, D sunt puncte necoplanare, H este ortocentrul triunghiului ABC și $DH \perp (ABC)$, atunci:

- Determină suma dintre numărul maxim și numărul minim al dreptelor, distincte, determinate de punctele A, B, C, D, H .
- Scris toate perechile de drepte necoplanare determinate de punctele A, B, C, D .
- Demonstrează că oricare două drepte necoplanare, determinate de punctele A, B, C, D , sunt perpendiculare.

Stelică Pană, Chirnovi

Soluție: a) $6 + 10 = 16$; b) AB și CD , AC și BD , BC și AD ; c) $CH \cap AB = \{C'\} \Rightarrow CC' \perp AB$; $CC' \perp AB$ și $DH \perp (ABC) \Rightarrow C'D \perp AB$; $AB \perp C'D$ și $AB \perp CC' \Rightarrow AB \perp (CC'D)$; $AB \perp (CC'D)$ și $CD \subset (CC'D) \Rightarrow AB \perp CD$; asemănător se demonstrează că $AC \perp BD$ și $AD \perp BC$.



Problema 4.

Se consideră numărul real a , $a > 0$ și piramida patrulateră regulată $SABCD$. Dacă $AB = a$, punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor $[SC]$, $[AB]$, $[BC]$ și $[MN] \equiv [AB]$, atunci:

- calculați aria triunghiului MNP ;
- determinați măsura unghiului dintre planele (ABC) și (MNP) .

Sorin Furtună, Călărași

Soluție: a) $AB = a \Rightarrow MN = a$ și $NP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABC)$; $E \in (OC)$, $[OE] \equiv [EC] \Rightarrow ME \parallel SO \Rightarrow ME \perp (ABC)$ (1); $AC \perp BD$, $AC \parallel NP$ și $OB \parallel EP \Rightarrow EP \perp NP$ (2); din (1) și (2) $\Rightarrow MP \perp PN \Rightarrow MP = \sqrt{MN^2 - NP^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A_{\Delta MNP} = \frac{a^2}{4}$; b) măsura unghiului dintre planele (ABC) și (MNP) este egală cu $m(\angle EPM)$; $EP = \frac{1}{2}MP \Rightarrow m(\angle EMP) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle EPM) = 60^\circ$.

