

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2018
ETAPA LOCALĂ – 25 FEBRUARIE 2018
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – clasa a V-a

Problema 1. (7 puncte)

- a). Arătați că: $1^2 + 9^2 + 44^2 = 2018$
b). Dovediți că numărul 2018^{2k+1} se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte distincte, oricare ar fi numărul natural k .

Soluție. a). $1^2 + 9^2 + 44^2 = 1 + 81 + 1936 \dots \dots \dots (2p)$
 $= 2018 \dots \dots \dots (1p)$

b). $2018^{2k+1} = 2018^{2k} \cdot 2018 \dots \dots \dots (1p)$
 $= (2018^k)^2 \cdot (1^2 + 9^2 + 44^2) \dots \dots \dots (2p)$
 $= (2018^k \cdot 1)^2 + (2018^k \cdot 9)^2 + (2018^k \cdot 44)^2 \dots \dots \dots (1p)$

Problema 2. (7 puncte)

Se consideră numărul $N = 1 + 3 + 5 + \dots + 249$.

- a). Arătați că N este pătrat perfect.
b). Dovediți că N este cub perfect.

Soluție. a). Arată că N are 125 termeni $\dots \dots \dots (2p)$
 $2N = 125 \cdot (1 + 249) \dots \dots \dots (1p)$
 $N = 125 \cdot 250 : 2 \dots \dots \dots (1p)$
 $N = 125^2 \dots \dots \dots (1p)$

b). $N = 125^2 = (5^3)^2 \dots \dots \dots (1p)$
 $N = (5^2)^3 \dots \dots \dots (1p)$

Problema 3. (7 puncte)

- a). Aflați câte frezii și câte vase are la dispoziție florăreasa Florica, știind că dacă le așează câte 15 în fiecare vază, îi rămân 12 frezii pe tarabă, iar dacă le așează câte 19 în fiecare vază, îi rămân 4 vase goale.
- b). Găsiți cele două numere naturale a căror diferență este egală cu 1817, iar la împărțirea lor obținem câtul 10 și restul 8.

- Soluție. a).** Are de redistribuit: $12 + 4 \cdot 15 = 72$ (frezii) (1p)
 $72 : (19 - 15) = 18$ (vaze cu câte 19 frezii) (1p)
Deci sunt $18 + 4 = 22$ (vaze) (1p)
și $18 \cdot 19 = 342$ (frezii) (1p)
- b).** Reprezentare grafică (sau notații și relații corecte)
- $9 \cdot p + 8 = 1817$ (1p)
 $p = 201$ (nr. mai mic) (1p)
Deci $201 \cdot 10 + 8 = 2018$ (nr. mai mare) (1p)

Problema 4. (7 puncte)

$$\text{Fie } n = 17^{23} + 23^{17}$$

- a). Demonstrați că $n \div 8$.
- b). Determinați restul împărțirii lui n la 6.

- Soluție. a).** Avem $n = (16 + 1)^{23} + (24 - 1)^{17}$ (1p)
 $n = M_{16} + 1 + M_{24} - 1$ (1p)
 $n = M_8 + M_8 = M_8$ (1p)
- b).** $n = (18 - 1)^{23} + (24 - 1)^{17}$ (1p)
 $n = M_{18} - 1 + M_{24} - 1$ (1p)
 $n = M_6 - 1 + M_6 - 1 = M_6 + 6 - 1 + M_6 + 6 - 1 = M_6 + 10$ (1p)
 $n = M_6 + 10 = M_6 + 4 \Rightarrow \text{restul} = 4$ (1p)