



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 25 februarie 2018

Clasa a VII- a

VARIANTA 1

Barem orientativ de corectare și notare:

1.

Arătăm că $2\sqrt{2018} > \sqrt{2016} + \sqrt{2020}$ (1)

$$2\sqrt{2018} > \sqrt{2016} + \sqrt{2020} \Leftrightarrow \sqrt{2018} - \sqrt{2016} > \sqrt{2020} - \sqrt{2018} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2018} - \sqrt{2016}} < \frac{1}{\sqrt{2020} - \sqrt{2018}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2018} + \sqrt{2016}}{2} < \frac{\sqrt{2020} + \sqrt{2018}}{2} \quad (A) \quad \dots\dots 2p$$

Arătăm că $2\sqrt{2018} > \sqrt{2017} + \sqrt{2019}$ (2)

$$2\sqrt{2018} > \sqrt{2017} + \sqrt{2019} \Leftrightarrow \sqrt{2018} - \sqrt{2017} > \sqrt{2019} - \sqrt{2018} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2018} - \sqrt{2017}} < \frac{1}{\sqrt{2019} - \sqrt{2018}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2018} + \sqrt{2017}}{1} < \frac{\sqrt{2019} + \sqrt{2018}}{1} \quad (A) \quad \dots\dots 2p$$

Adunând relațiile (1) și (2) obținem:

$$4\sqrt{2018} > \sqrt{2016} + \sqrt{2017} + \sqrt{2019} + \sqrt{2020} \quad \dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2018}}{\sqrt{2016} + \sqrt{2017} + \sqrt{2019} + \sqrt{2020}} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \dots\dots 1p$$

Finalizare \dots\dots 1p

2.

Notând $\sqrt{x} = t$, avem $t > 0$ 2 puncte

Relația din ipoteză se scrie:

$$t^3 - (a+1)t - a = 0 \quad \dots\dots 1punct$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t^2 - t - a) = 0 \quad \dots\dots 2 puncte$$

Cum $t+1 > 0$ obținem $t^2 - t - a = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = a \xrightarrow{t=\sqrt{x}} x - \sqrt{x} = a \quad \dots\dots 2 puncte$

3.

$$\frac{CP}{PB} = 1; \quad \frac{AB}{AM} = \frac{3}{2}; \quad \frac{ME}{EC} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots 2p$$

Se observă că în $\triangle BCM$, $P \in (BC)$, $A \in BM$, $E \in (MC)$ și din calcul obținem:

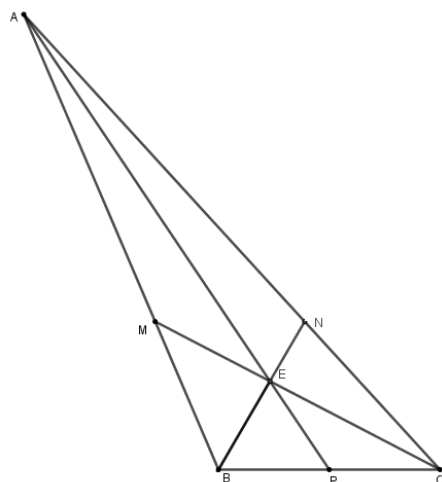
$$\frac{PC}{PB} \cdot \frac{AB}{AM} \cdot \frac{EM}{EC} = 1 \quad \xrightarrow{R.th. Menelaus} \quad \text{punctele A, E, P sunt coliniare.} \quad \dots\dots 1p$$

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABP și transversala CM care taie dreptele suport ale laturilor triunghiului ABP în punctele C, E și M:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{CB}{CP} \cdot \frac{EP}{EA} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{EP}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{EP}{EA} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots 1p$$

$$\frac{EP}{AP} = \frac{1}{5} \Rightarrow AP = 5EP, \text{ dar } AP = 5BP \Rightarrow PE = BP \Leftrightarrow BC = 2PE \quad \dots\dots\dots 1p$$

Cum [PE] este mediană în triunghiul BEC, rezultă că triunghiul BEC este dreptunghic și $m(\angle BEC) = 90^\circ$ 2p



4.

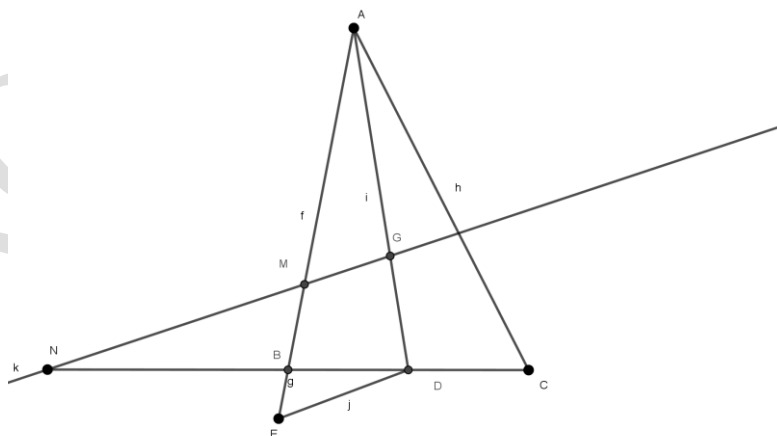
Fie D mijlocul laturii BC, rezultă $G \in (AD)$ și $\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$, (2 p)

Fie $E \in AB, B \in (ME), BE = \frac{BM}{2}$

Rezultă $\frac{BE}{BM} = \frac{BD}{BN} \left(= \frac{1}{2} \right)$ și conform teoremei reciproce a lui Thales, $MN \parallel DE$, . (2 p)

$\frac{AG}{AD} = \frac{AM}{AE} \left(= \frac{2}{3} \right)$ și conform teoremei reciproce a lui Thales, $MG \parallel DE$, . (2 p)

Din $MN \parallel DE$ și $MG \parallel DE$, rezultă M, N, G coliniare. (1 p)



Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Se acordă numai punctaje întregi.