Clasa a VII-a

1. Fie numărul $x = \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2010}\right)^n \cdot \frac{2011^n}{2^n}$. Determinaţi $n \in \mathbf{N}$ astfel încât numărul x să aibă 256 de divizori în **N**.

Barem:

1 p	Fie $a = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2010}$ Folosind $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ şi $\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ avem: $a = \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \dots + \frac{2}{2010\cdot 2011}$
1 p	$= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right)$ $= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2011}\right)$
1 p	$= 2 \cdot \frac{2010}{2011}$
1 p	$x = \left(2 \cdot \frac{2010}{2011}\right)^n \cdot \frac{2011^n}{2^n} = 2^n \cdot \frac{2010^n}{2011^n} \cdot \frac{2011^n}{2^n} = 2010^n$
1 p	$256 = 4^4$; $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow 2010^n = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 67^n$
1 p	Numărul de divizori naturali ai lui x este egal cu $(n + 1)(n + 1)(n + 1)(n + 1) = (n + 1)^4$
1 p	Finalizare: $(n + 1)^4 = 4^4 \Rightarrow n + 1 = 4 \Rightarrow n = 3$
7 p	**TOTAL**

2. Arătaţi că numărul $A = \left[\left(8+3\sqrt{7}\right)^{2n+3} + \frac{7}{\left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+3}}\right] \cdot \frac{\left(16-6\sqrt{7}\right)^{2n+2}}{2^{2n+3}} - 4\left(\sqrt{63} + 5\frac{3}{4}\right)$ este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Barem:

2 p	Avem $\left(8+3\sqrt{7}\right)^{2n+3} + \frac{7}{\left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+3}} = \frac{\left[\left(8+3\sqrt{7}\right)\left(8-3\sqrt{7}\right)\right]^{2n+3}+7}{\left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+3}} = \frac{8}{\left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+3}}$
1 p	$\left(16-6\sqrt{7}\right)^{2n+2} = \left[2\left(8-3\sqrt{7}\right)\right]^{2n+2} = 2^{2n+2} \cdot \left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+2}$
2 p	Înlocuind obţinem: $A = \frac{8}{\left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+3}} \cdot \frac{2^{2n+2} \cdot \left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+2}}{2^{2n+3}} - 4\left(3\sqrt{7} + \frac{23}{4}\right)$ $= \frac{8}{\left(8-3\sqrt{7}\right)} \cdot \frac{1}{2} - 12\sqrt{7} - 23$
1 p	$= 4\left(8+3\sqrt{7}\right) - 12\sqrt{7} - 23$
1 p	$= 9$ $A = 3^2 \Rightarrow$ A este pătrat perfect
7 p	**TOTAL**

3. În triunghiul isoscel ABC, m(∢A) = 120°, fie M mijlocul laturii [AB]. Perpendiculara din M pe BC intersectează AC în D şi fie AE ⊥ BC, $E \in (BC)$.

Arătaţi că:

a) ΔDAM este echilateral
b) DAEM este romb
c) CD = 3·AD

prof. Hotca Ana
Şcoala Gimnazială Certeze

Barem:

2 p	a) punctele D, A, C sunt coliniare $m(\triangleleft DAM)=180^o-120^o=60^o$; {N} = MD∩BC $DN \parallel AE \Rightarrow m(\triangleleft MAE)=m(\triangleleft BMN)=60^o$ (unghiuri corespondente) $m(\triangleleft BMN)=m(\triangleleft DMA)=60^o$ (unghiuri opuse la varf) $m(\triangleleft ADM)=180^o-60^o-60^o=60^o$ $m(\triangleleft DAM)=m(\triangleleft AMD)=m(\triangleleft MDA)=60^o \Rightarrow \Delta DAM=\Delta echilateral$
3 p	b) în patrulaterul DAEM avem : $[MA]\equiv[AD]\equiv[DM]$ $\Delta BMN=\Delta dreptunghic$ $m(\triangleleft MBN)=30^o$ ($\Delta ABC=\Delta isoscel$ cu $m(\triangleleft A)=120^o \Rightarrow MN=\dfrac{BM}{2}$ [MN]=linie mijlocie în $\Delta ABE \Rightarrow AE=2\cdot MN=BM$ $[AD]\equiv[DM]\equiv[AE]$ - $din[AM]\equiv[AE]$ şi $m(\triangleleft MAE)=60^o \Rightarrow \Delta AME=\Delta echilateral$ deci $[AE]\equiv[ME]$ -avem: $[AD]\equiv[DM]\equiv[AE]\equiv[ME]$
2 p	c) CD = AC + AD = AB + AD = 2·BM + AD = 2·AD + AD = 3·AD
7 p	**TOTAL**

4. Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor [AC] şi [BD] ale trapezului ABCD cu AB||CD. Paralela prin O la baze intersectează laturile [AD] şi [BC] în E şi respective F.

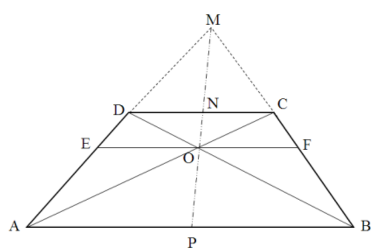
Demonstraţi că:

a) [OE] ≡ [OF];

b) $\frac{1}{OE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}$;

c) Dacă AD∩BC={M}, arătaţi că punctele M, O şi mijloacele bazelor sunt coliniare.

Barem:



1 p	a) În Δ ADB: EO‖AB ⇒ $\frac{EO}{AB} = \frac{DO}{DB}$ (1) În Δ ABC: OF‖AB ⇒ $\frac{OF}{AB} = \frac{OC}{AC}$ (2) DC‖AB ⇒ $\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA} \Rightarrow \frac{DO}{DB} = \frac{CO}{AC}$ (3)
1 p	Din (1), (2) şi (3) ⇒ $\frac{EO}{AB} = \frac{OF}{AB}$ ⇒ EO = OF ⇒[EO] = [OF]
1 p	b) Δ ADC: EO‖DC ⇒ $\frac{EO}{DC} = \frac{AO}{AC}$ În Δ ABC: OF‖AB ⇒ $\frac{OF}{AB} = \frac{OC}{AC}$
1 p	Adunând relaţiile: $\frac{EO}{DC} + \frac{OF}{AB} = \frac{AO}{AC} + \frac{OC}{AC} \Rightarrow$ $\frac{EO}{DC} + \frac{OF}{AB} = 1$
1 p	OF = OE ⇒ $\frac{EO}{DC} + \frac{EO}{AB} = 1 \Big\vert : OE$ $\frac{1}{OE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}$
1 p	c) $\left.\begin{array}{c}(MO) \text{ mediană în } \Delta\ MEF \\ CD \parallel EF \\ DC \cap MO = \{N\}\end{array}\right\}$ ⇒ [DN] = [NC] ⇒ N mijlocul lui [DC] şi M, N, O coliniare (1)
0,5 p	$\left.\begin{array}{c}(MO) \text{ mediană în } \Delta\ MEF \\ AB \parallel EF \\ AB \cap EF = \{P\}\end{array}\right\}$ ⇒ [AP] = [PB] ⇒ P mijlocul lui [AB] şi M, O, P coliniare (2)
0,5 p	$\left.\begin{array}{c}M, N, O \text{ coliniare} \\ M, O, P \text{ coliniare}\end{array}\right\}$ ⇒ M, N, O, P coliniare
7 p	**TOTAL**

Notă: Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.