

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2018
Clasa a V-a**Problema 1.**

La începutul orei de matematică fiecare elev primește 10 jetoane¹ și un bilet pe care este scris un număr natural nenul. Pe fiecare jeton este scris unul din numerele 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 și nu există mai multe jetoane care să conțină același număr. Fiecare elev trebuie să aleagă dintre jetoanele sale pe cele care au proprietatea că suma numerelor scrise pe ele coincide cu numărul scris pe bilet.

a) Care este cel mai mare număr, care poate fi scris pe bilet, astfel încât problema să aibă soluție ?

b) Pe biletul lui Dan scrie numărul 1000. Stabilește care sunt jetoanele pe care trebuie să le aleagă Dan.

c) Ana afirmă că pentru numărul scris pe biletul primit, număr care este mai mic decât numărul determinat la punctul a), îi este imposibil să găsească printre jetoanele ei, unele, care au proprietatea că suma numerelor scrise pe ele coincide cu numărul scris pe bilet. Este adevărată afirmația făcută de Ana?

Nota¹: Jetonul este o piesă plată care reprezintă o anumită valoare sau un număr de ordine.

Gabriela Ruse, Călărași

Problema 2.

În vremuri străvechi și de mult apuse, Lordul Roland, aflat în război cu vecinul său, Lordul Archibald a fost atacat de acesta. În mare grabă Roland a scos din tezaur 100 000 monezi de aur ca să plătească o armată formată din diferite grupuri de războinici. Astfel grupul sulițașilor număra 100, arcașii erau de două ori mai mulți decât sulițașii, cavalerii, în număr egal cu îngerii, erau de două ori mai puțini decât sulițașii și în plus a mai chemat 60 de grifoni (creaturi fioroase înaripate). Banii scoși i-au ajuns să plătească această armată și nu i-a mai rămas niciun galben. Toți războinicii dintr-un grup au primit același număr natural de monede. Dacă se împarte numărul monedelor primite de fiecare sulițaș la 2, de fiecare arcaș la 3, de fiecare grifon la 5, de fiecare cavaler la 7 și de fiecare înger la 11 se obține de fiecare dată același cât și restul 0.

a) Câți războinici numără armata lui Roland?

b) Câte monezi de aur a primit fiecare grup de războinici?

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 3.

Numerele naturale nenule se scriu într-un tabel. Primele șase linii ale tabelului sunt completate ca în desenul alăturat și regula de completare se păstrează pentru toate liniile care se scriu.

a) Scrie pe foaia de concurs linia 10.

b) Precizează care este numărul scris la mijlocul liniei 24 (justifică răspunsul).

linia 1				1			
linia 2			2	3	4		
linia 3				5			
linia 4		6	7	8	9	10	
linia 5				11			
linia 6	12	13	14	15	16	17	18
⋮							

Sorin Furtună, Călărași

Problema 4.

Un număr natural se numește *voios* dacă:

- este mai mare decât 1000 și mai mic decât 10000;
- pentru scrierea lui nu se utilizează cifra zero și nu se folosește aceeași cifră de mai multe ori;

a) Calculează diferența dintre cel mai mare număr *voios* și cel mai mic număr *voios*.

b) Câte numere *voioase* se pot forma cu cifrele 1, 2, 3 și 4?

c) Demonstrează că nu există două numere *voioase*, formate cu aceleași cifre a, b, c și d a căror diferență să fie egală cu unul din numerele 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Probleme au fost selectate și modificate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 2 puncte, b) 2 puncte, c) 3 puncte; Problema 2. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 3. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 4. a) 2 puncte, b) 2 puncte, c) 3 puncte.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2018
Clasa a V-a

Problema 1.

În desenul alăturat este o grilă specifică jocului Sudoku. În exemplul dat, grila jocului este un pătrat acoperit cu 4×4 pătrățele. Aceste pătrățele sunt grupate câte 4, prin marcajul cu linie groasă, în patru pătrate, numite regiuni. Regula jocului este simplă: fiecare rând, coloană sau regiune trebuie să conțină o singură dată cifrele 1, 2, 3, 4.

a) Ada a citit, în prima zi de vacanță, 43 de pagini dintr-o carte, apoi în fiecare zi citește un număr dublu de pagini față de ziua precedentă. După câte zile a citit Ada 301 de pagini?

Găsește numărul de zile necesar și scrie-l în pătrățelul C1 (C1 este pătratul situat în linia 1 și în coloana C).

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

b) Determină două numere raționale care au suma $\frac{13}{6}$ și diferența $\frac{5}{6}$. Completează căsuța A2 cu produsul celor două numere (A2 este pătratul situat în linia 2 și în coloana A).

c) Scrie numărul care reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor 28 și 52 în căsuța D3 (D3 este pătratul situat în linia 3 și în coloana D).

d) Scrie numărul care reprezintă $\frac{4}{3}$ din $\frac{3}{2}$ în căsuța B4 (B4 este pătratul situat în linia 4 și în coloana B).

e) Recitește regulile jocului și completează corespunzător celelalte 12 pătrățele.

Diana Stanciu, Oltenița

Problema 2.

Se consideră numerele $A = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2018$ și $B = A \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018}\right)$.

a) Arată că numărul $A + 5$ nu este un număr prim.

b) Găsește 2017 numere naturale consecutive, care nu sunt numere prime.

c) Arată că $B \in \mathbb{N}$.

d) Demonstrează că B este divizibil cu 2019.

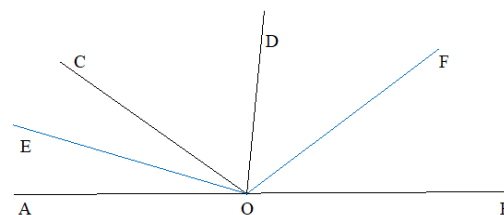
Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 3.

În desenul alăturat punctele A, O, B sunt coliniare, semidreapta (OE) este bisectoarea $\angle AOC$, semidreapta (OF) este bisectoarea $\angle BOD$ și $m(\angle EOF) = 120^\circ$.

a) Determină $m(\angle COD)$.

b) Dacă M este un punct din interiorul $\angle BOD$, astfel încât $OM \perp OC$ și $m(\angle FOM) = 10^\circ$, atunci demonstrează că $m(\angle AOC) = 40^\circ$ sau $m(\angle AOC) = 80^\circ$.



Relu Ciupea, Oltenița

Problema 4.

Se consideră unghiul alungit $\angle AOB$ și, de aceeași parte a dreptei AB , semidreptele $[OX]$ și $[OY]$ astfel încât $[OX]$ este inclusă în interiorul $\angle AOY$ și $m(\angle XOY)$ egală cu media aritmetică a $m(\angle AOX)$ și $m(\angle BOY)$.

a) Dacă știi că $m(\angle AOX)$ reprezintă 25% din $m(\angle BOY)$, atunci determină $m(\angle AOX)$ și $m(\angle BOY)$.

b) Dacă $C \in [OX]$, $D \in [OY]$ și triunghiul COD este isoscel cu baza latura $[CD]$, punctul M aparține bisectoarei $\angle AOX$, N aparține semidreptei opuse bisectoarei $\angle BOY$ și $OM = ON$, arătați că $CN = DM$.

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Probleme au fost selectate și modificate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Baremul de notare este: Problema 1. a) 1 punct, b) 1 punct, c) 1 punct, d) 1 punct, e) 3 puncte;

Problema 2. a) 1 punct, b) 2 puncte, c) 1 punct, d) 3 puncte; Problema 3. a) 3 puncte, b) 4 puncte;

Problema 4. a) 3 puncte, b) 4 puncte.

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2018
Clasa a VII-a****Problema 1.**

- a) Calculează aria unui pătrat care are lungimea laturii egală cu $\sqrt{5} m$.
b) Demonstrează că $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$.
c) Determină toate numerele reale pozitive cu proprietatea $x \cdot [x] = 5$ (cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x)

Adriana Constantin, Călărași

Problema 2.

- a) Arată că $4(x-y)^2 = 9xy$ dacă și numai dacă $(4x-y)(4y-x) = 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
b) Demonstrează că dacă x și y sunt numere raționale pozitive cu proprietatea $4(x-y)^2 = 9xy$, atunci $y = 4x$ sau $\sqrt{\frac{12x+y}{4x+9y}} \in \mathbb{Q}$.

Cristina Bornea, Călărași

Problema 3.

Se consideră trapezul $ABCD$, dacă $AB \parallel CD$, $AB = 9 cm$, $AD = 4 cm$, $AC = 6 cm$ și semidreapta $[AC]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$, atunci:

- a) Arată că triunghiul ADC este isoscel.
b) Demonstrează că triunghiurile ADC și ACB sunt asemenea.
c) Determină perimetrul trapezului $ABCD$.

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnoși

Problema 4.

Se consideră triunghiul ABC și punctul $M \in (BC)$, astfel încât $\frac{BM}{CM} = \frac{2}{3}$. Dacă dreapta care conține punctul M și este paralelă cu AC intersectează latura AB în punctul D , atunci arătați că:

- a) $DM = AC \cdot \frac{2}{5}$;
b) $AM < \frac{2}{5} \cdot AC + \frac{3}{5} \cdot AB$.

Gabriela Ruse, Călărași

Probleme au fost selectate și modificate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Barem de notare este: Problema 1. a) 1 punct, b) 2 puncte, c) 4 puncte; Problema 2. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 3. a) 2 puncte, b) 3 puncte, c) 4 puncte; Problema 4. a) 2 puncte, b) 5 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2018
Clasa a VIII-a**Problema 1.**

Prietenii Iuliei au hotărât să-i cumpere de ziua ei un cadou și să contribuie fiecare cu aceeași sumă de bani. Ei au stabilit o oră de întâlnire la un mall pentru cumpărarea cadoului. La ora fixată pentru întâlnire patru dintre ei nu erau prezenți. Au refăcut calculele și au constatat că pentru strângerea sumei stabilite inițial fiecare trebuie să contribuie cu opt lei mai mult. Între timp au ajuns la mall cei patru absenți împreună cu alți cinci prieteni ai Iuliei, care doreau și ei să participe la cumpărarea cadoului. În aceste condiții fiecare a contribuit cu șapte lei mai puțin decât se hotărâse inițial. Câți prieteni au participat, în final, la cumpărarea cadoului?

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnovi

Problema 2.

- a) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $x, y \in (0, +\infty)$, atunci arătați că: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$. (Inegalitatea Titu Andreescu)
- b) Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$, atunci: $\frac{2ac}{2ac+b^2} + \frac{2ab}{2ab+c^2} + \frac{2bc}{2bc+a^2} \leq 2$.

Cristina Bornea, Călărași

Problema 3.

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare.

- a) Dacă planele (ACD) și (BCD) sunt perpendiculare, proiecția lui A pe planul (BCD) este C și proiecția lui B pe planul (ACD) este D , atunci demonstrați că $AB^2 = AC^2 + CD^2 + BD^2$.
- b) Dacă M este mijlocul segmentului (AB) , N este mijlocul segmentului (AC) , P este mijlocul segmentului (AD) , Q este mijlocul segmentului (BC) , R este mijlocul segmentului (BD) și S este mijlocul segmentului (DC) , atunci demonstrați că dreptele MS , NR și PQ sunt concurente.

Viorica Stoianovici, Călărași

Problema 4.

Dacă $ABCD A'B'C'D'$ este un cub, punctul M este mijlocul muchiei $[BC]$, punctul N este mijlocul segmentului $[D'M]$, iar P este punctul de intersecție al dreptelor $D'B$ și CN , atunci arătați că $D'B \perp (A'DP)$.

Gabriela Ruse, Călărași

Probleme au fost selectate și modificate de inspectorul școlar Gheorghe Stoianovici

Succes

Barem de notare este: Problema 1. 7 puncte; Problema 2. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 3. a) 3 puncte, b) 4 puncte; Problema 4. 7 puncte.