

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. Dacă $x \in [-2; +\infty)$ și $y \in [-2; +\infty)$, atunci numărul $xy + 2x + 2y \in [-4; +\infty)$.

Prof. Gabriela Șlincu

Soluție:

Din $x, y \in [-2; +\infty) \Rightarrow x + 2 \geq 0$ și $y + 2 \geq 0$; făcând produsul ultimelor două relații, obținem:

$(x + 2)(y + 2) \geq 0$, de unde rezultă că $xy + 2x + 2y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow xy + 2x + 2y \geq -4$, adică

$xy + 2x + 2y \in [-4; +\infty)$.

Barem:

Scrie $x + 2 \geq 0$, $y + 2 \geq 0$	2p
Efectuează corect produsul $(x + 2)(y + 2)$ și scrie $(x + 2)(y + 2) \geq 0$	2p
Obține $xy + 2x + 2y \geq -4$	2p
Finalizare: $xy + 2x + 2y \in [-4; +\infty)$	1p

2. (3p) a) Arătați că $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$.

(4p) b) Arătați că numărul $S < 45$, unde $S = \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{8072}}$.

prof. Gheorghe Iacoviță

Soluție:

a) $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a} - \sqrt{a-1} \Leftrightarrow 1 < 2\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{a-1}) \Leftrightarrow 1 < 2a - 2\sqrt{a(a-1)}$, care se mai poate scrie

sub forma: $2\sqrt{a(a-1)} < 2a - 1$ și prin ridicarea ambilor membri la pătrat se obține:

$4a(a-1) < (2a-1)^2 \Leftrightarrow 4a^2 - 4a < 4a^2 - 4a + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$, adevărat, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.

b) Suma S se mai poate scrie: $S = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2018}}$. Folosind relația de la pct.

a), putem scrie: pentru $a = 1$: $\frac{1}{2\sqrt{1}} < \sqrt{1} - \sqrt{0}$; pentru $a = 2$: $\frac{1}{2\sqrt{2}} < \sqrt{2} - \sqrt{1}$; pentru $a = 3$:

$\frac{1}{2\sqrt{3}} < \sqrt{3} - \sqrt{2}$; ..., pentru $a = 2018$: $\frac{1}{2\sqrt{2018}} < \sqrt{2018} - \sqrt{2017}$. Adunând relațiile, membru

cu membru, se obține: $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2018}} < \sqrt{2018} < \sqrt{2025} = 45 \Rightarrow S < 45$.

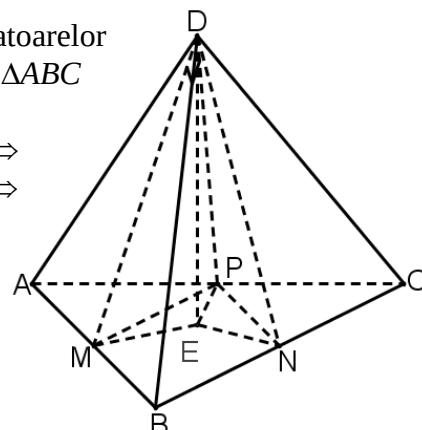
Barem:

a) Aduce la același numitor și obține $2\sqrt{a(a-1)} < 2a - 1$	1p
Ridică ambii membri la pătrat și face calculele: $4a^2 - 4a < 4a^2 - 4a + 1$	1p
Finalizare $0 < 1$, adevărat, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.	1p
b) Scrie suma S sub forma: $S = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2018}}$	1p
Folosește relația de la punctul a) și scrie șirul de inegalități	1p
Adună inegalitățile, membru cu membru, și obține	1p
$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2018}} < \sqrt{2018}$	
Finalizare: $\sqrt{2018} < \sqrt{2025} = 45 \Rightarrow S < 45$	1p

3. (7p) Fie punctele A, B, C, D necoplanare astfel încât $AD = BD = CD$. Fie M, N, P mijloacele segmentelor $[AB], [BC], [AC]$. Știind că $DM \perp DP$, arătați că $DN \perp (DMP)$.

Soluție:

Fie $E = \text{pr}_{(ABC)} D$; $AD = DB = DC \Rightarrow E$ este intersecția mediatoarelor
 $\Rightarrow EM \perp AB$; $EN \perp BC$; $EP \perp AC$; NP – linie mijlocie în $\triangle ABC$
 $\Rightarrow NP \parallel AB$; dar $EM \perp AB \Rightarrow EM \perp PN$ (1).
 Cum $DE \perp (ABC) \Rightarrow DE \perp PN$ (2). Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow$
 $PN \perp (DEM) \Rightarrow PN \perp DM$; dar $DM \perp DP$ și $DM \perp PN \Rightarrow$
 $DM \perp (DPN) \Rightarrow DM \perp DN$ (3).
 MP – linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow MP \parallel BC$,
 dar $EN \perp BC \Rightarrow EN \perp MP$; $DE \perp (ABC) \Rightarrow$
 $DE \perp MP$, adică $MP \perp (DEN) \Rightarrow MP \perp DN$ (4).
 În final, din (3) și (4), rezultă că $DN \perp (DMP)$.



Barem:

Figura	1p
$E = \text{pr}_{(ABC)} D$; $AD = DB = DC \Rightarrow E$ este intersecția mediatoarelor $\Rightarrow EM \perp AB$; $EN \perp BC$; $EP \perp AC$;	1p
NP – linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow NP \parallel AB$; dar $EM \perp AB \Rightarrow EM \perp PN$ (1)	1p
$DE \perp (ABC) \Rightarrow DE \perp PN$ (2); din (1) și (2) $\Rightarrow PN \perp (DEM) \Rightarrow PN \perp DM$	1p
$DM \perp DP$ și $DM \perp PN \Rightarrow DM \perp (DPN) \Rightarrow DM \perp DN$ (3)	1p
MP – linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow MP \parallel BC$, dar $EN \perp BC \Rightarrow EN \perp MP$; $DE \perp (ABC) \Rightarrow DE \perp MP$, deci $MP \perp (DEN) \Rightarrow MP \perp DN$ (4)	1p
Finalizare: din (3) și (4), rezultă că $DN \perp (DMP)$	1p

4. (7p) Fie $ABCD A' B' C' D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AA' = 4\sqrt{2}$ cm. Dacă punctul O este centrul bazei $ABCD$, punctul M este mijlocul muchiei $[DD']$ și $m(\angle(OM; AC')) = 60^\circ$, să se afle distanța de la punctul M la dreapta BC' .

prof. Stela Boghian

Soluție:

În $\triangle BDD'$, $[OM]$ – linie mijlocie, deci $OM \parallel BD' \Rightarrow m(\angle(OM, AC')) = m(\angle(BD', AC')) =$
 $m(\angle AQB)$, unde $BD' \cap AC' = \{Q\}$. Deci, $m(\angle AQB) = 60^\circ$ (1);

$AB \perp BC$, $AB \perp BB'$, $BC \cap BB' = \{B\} \Rightarrow AB \perp (BCC' B')$
 și cum $BC' \subset (BCC' B') \Rightarrow AB \perp BC'$. Dar, $AB \parallel C' D'$ și
 $[AB] \equiv [C' D'] \Rightarrow ABC' D'$ dreptunghi (2), centrul său fiind
 punctul Q ; din (1) și (2) rezultă că $\triangle ABQ$ este echilateral.

Fie $AB = a$ cm $\Rightarrow BD' = 2a$ cm, $BD = a\sqrt{2}$ cm și în $\triangle BDD'$,
 aplicând teorema lui Pitagora, găsim $a = 4$ cm, deci $AB = 4$ cm;

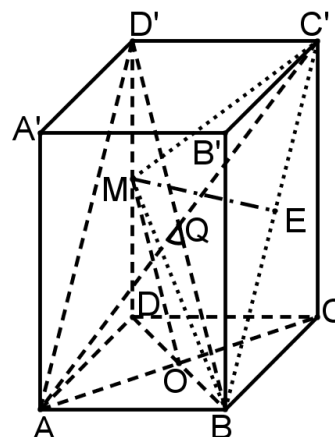
În triunghiul $\triangle BDM$, $m(\angle D) = 90^\circ \xrightarrow{T.Pit.} BM = 2\sqrt{10}$ cm;

În triunghiul $\triangle C' D' M$, $m(\angle D') = 90^\circ \xrightarrow{T.Pit.} MC' = 2\sqrt{6}$ cm;

În triunghiul $\triangle BCC'$, $m(\angle C) = 90^\circ \xrightarrow{T.Pit.} BC' = 4\sqrt{3}$ cm;

Distanța de la punctul M la dreapta BC' este lungimea înălțimii din M a triunghiului $\triangle MC' B$;
 fie aceasta $[ME]$ și $BE = x$ (cm). În $\triangle MBE$, $m(\angle E) = 90^\circ \xrightarrow{T.Pit.} ME^2 = 40 - x^2$; în $\triangle MC' E$,

$$m(\angle E) = 90^\circ \xrightarrow{T.Pit.} ME^2 = 24 - 48 + 8\sqrt{3} - x^2 \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm, de unde } ME = \frac{2\sqrt{42}}{3} \text{ cm.}$$



Barem:

Figura	1p
Găsește $m(\sphericalangle AQB) = 60^\circ$	1p
Demonstrează că triunghiul $\triangle ABQ$ este echilateral	1p
Fie $AB = a$ (cm); aplică teorema lui Pitagora în $\triangle BDD'$ și găsește $AB = 4$ cm	1p
Aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $\triangle BDM$, $\triangle C'D'M$, respectiv $\triangle BCC'$ și găsește $BM = 2\sqrt{10}$ cm, $MC' = 2\sqrt{6}$ cm și respectiv $BC' = 4\sqrt{3}$ cm	1p
$d(M, BC')$ este lungimea înălțimii din M a triunghiului $\triangle MC'B$; fie aceasta $[ME]$ și $BE = x$ (cm). În $\triangle MBE$, aplică teorema lui Pitagora și găsește $m ME^2 = 40 - x^2$; analog, în $\triangle MC'E$, prin teoremă lui Pitagora, $ME^2 = 24 - 48 + 8\sqrt{3} - x^2 \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm	1p
Finalizare: $ME = \frac{2\sqrt{42}}{3}$ cm.	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.