

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

10 februarie 2024

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Calculați:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2 + n}\},$$

unde $\{\cdot\}$ este funcția parte fracționară.

Subiectul 2. Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ satisface: $(f(x))^2 + f(x) = x$, oricare ar fi $x > 0$.

Calculați:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{și} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}.$$

Subiectul 3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică, adică $A^t = -A$. Demonstrați că:

$$\det(I_2 + A^2) \geq 0 \quad \text{și} \quad \det(I_2 - A^2) \geq 0.$$

Subiectul 4. a) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât: $A^4 = 0_2$. Demonstrați că: $A^2 = 0_2$.

b) Există matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât: $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.