1. a) $a, b, \in (0,1) \Rightarrow \log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{ab} > 0$ și $\log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \log_b \sqrt{ab} > 0$ 2p

   Prin înmulțirea inegalităților se obține $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{4}(\log_a b + 1)(\log_b a + 1) = \frac{1}{4}(2 + \log_a b + \log_b a) \geq \frac{1}{4}(2+2) = 1$

   (s-a folosit $\log_a b, \log_b a > 0, pentru\ a, b \in (0,1)$) 2p

   b) Folosind inegalitatea mediilor $\frac{3abc}{ab+ac+bc} = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow$ $\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq \log_a \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{3}\left(1 + \log_a b + \log_a c\right)$

   Analog

$$\log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq \frac{1}{3}\left(1 + \log_b a + \log_b c\right)$$
$$\log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq \frac{1}{3}\left(1 + \log_c a + \log_c b\right)$$

....2p

Prin adunare și folosind $x + \frac{1}{x} \geq 2, x > 0 \Rightarrow inegalitatea\ din\ enunț$ 1p

2. a)

$(z_1 - 1)(z_2 - 1)(z_3 - 1) =$
$z_1z_2z_3 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3 + z_1 + z_2 + z_3 - 1 = z_1z_2z_3\left(1 - \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}\right) + \underbrace{z_1+z_2+z_3 - 1}_{0} = z_1z_2z_3(1 - \overline{z_1} - \overline{z_2} - \overline{z_3}) = z_1z_2z_3(1 - \overline{z_1 + z_2 + z_3}) = z_1z_2z_3(1-1) = 0$

(avem $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$și celelalte) ……………………………. 4p

b) Din punctul a) rezultă că cel puțin unul din numere este egal cu 1 ……………………………………………………………………..1p

Dacă $z_1 = 1$ din $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Rightarrow z_2 + z_3 = 0$ deci $z_1{}^{2013} + z_2{}^{2013} + z_3{}^{2013} = 1 + z_2{}^{2013} + (-z_2)^{2013} = 1$, analog cazurile $z_2 = 1\ sau\ z_3 = 1$ 2p

3. $20^x - 5^x - 4^x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (5^x - 1)(4^x - 1) \geq 0$, adevărată deoarece pentru $x \geq 0$, $5^x - 1 \geq 0$ și $4^x - 1 \geq 0$ iar

Pentru $x < 0$, $5^x - 1 < 0$ și $4^x - 1 < 0$ 2p

b) $f(x)$=$(5^x - 1)(4^x - 1)$- 1

Dacă $x < y \leq 0 \Rightarrow 5^x - 1 < 5^y - 1 \leq 0$ *si* $4^x - 1 < 4^y - 1 \leq 0$
Prin înmulțire$(5^x - 1)(4^x - 1) > (5^y - 1)(4^y - 1) \geq 0$ deci $f(x) > f(y)$
Dacă $0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq 5^x - 1 < 5^y - 1$
$0 \leq 4^x - 1 < 4^y - 1$ și prin înmulțire $0 \leq (5^x - 1)(4^x - 1) < (5^y - 1)(4^y - 1)$ deci $f(x) < f(y)$...............3p

c) Dacă $x < 0$ ecuația nu are soluție deoarece $20^x < 5^x$ deci $20^x - 5^x - 4^x < 0$
Deoarece f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ și $f(2) = 359$ rezultă $x = 2$ singura soluție ……………………………………………………….2p
4.

Pentru $n=1$ avem că $f(1)=\left[\frac{f(1)}{2}\right]$ și rezultă că $f(1)\in\{-1,0\}$,în urma calculului:

$a = \left[\frac{a}{2}\right] \Rightarrow \frac{a}{2} - 1 < a \leq \frac{a}{2}$ deci $-2 < a \leq 0$, a întreg deci $a \in \{-1,0\}$

- Dacă $f(1)=0$ se obține că $f(2)=\left[\frac{0}{2}\right]+\left[\frac{f(2)}{3}\right]=\left[\frac{f(2)}{3}\right]$ și cu un calcul asemănător $f(2)=0$, deci f nu este injectivă.
- Dacă $f(1)=-1$ se obține că $f(2)=\left[\frac{-1}{2}\right]+\left[\frac{f(2)}{3}\right]=-1+\left[\frac{f(2)}{3}\right]$. Din această relație, folosind același calcul rezultă că $-3 < f(2) \leq -\frac{3}{2}$, deci $f(2)\in\{-2,-1\}$ și, din cauza injectivității, $f(2)=-2$.

Presupunem că $f(k)=-k$ și avem că

$$f(k+1)=\left[\frac{-1}{2}\right]+\left[\frac{-2}{3}\right]+\left[\frac{-3}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{-k}{k+1}\right]+\left[\frac{f(k+1)}{k+2}\right]=-k+\left[\frac{f(k+1)}{k+2}\right].$$

Din egalitatea $f(k+1)+k=\left[\frac{f(k+1)}{k+2}\right]$ se obține că $f(k+1)+k\leq\frac{f(k+1)}{k+2}< f(k+1)+k+1$, sau

$$(k+2)f(k+1)+k^2+2k\leq f(k+1)<(k+2)f(k+1)+(k+1)(k+2).$$

Din relația anterioară se obține

Barem clasa a X-a

$$(k+1)f(k+1)+k^2+2k+1\le 1 \text{ și } 0<(k+1)f(k+1)+(k+1)(k+2)$$

relații din care rezultă că

$f(k+1)\le -k-1+\dfrac{1}{k+1}$ respectiv $f(k+1)>-k-2$.

Astfel avem că $f(k+1)=-k-1$

.

Așadar $f(-n)=-n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.