

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2018
ETAPA LOCALĂ – 25 FEBRUARIE 2018
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – clasa a VII-a

Problema 1. (7 puncte)

a). Fie numărul $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Demonstrați că $0,2 < \sqrt{\frac{A}{11}} < 0,3$.

b). Arătați că numărul $B = \sqrt{2n^2 + 10n + 50}$ este un număr irațional, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluție. a). $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 100} <$
 $< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{99}{100} \dots \dots \dots (1p)$

Deci $A \cdot \frac{1}{11} < \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{11} \Rightarrow \frac{A}{11} < \frac{9}{100} \Rightarrow \sqrt{\frac{A}{11}} < \frac{3}{10} = 0,3 \dots \dots \dots (1p)$

$A = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 100} > \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} =$
 $= \frac{100}{101} - \frac{1}{2} = \frac{99}{202} \dots \dots \dots (1p)$

$\Rightarrow A > \frac{99}{202} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{A}{11}} > \sqrt{\frac{9}{202}} > \sqrt{\frac{4}{100}} = 0,2 \Rightarrow 0,2 < \sqrt{\frac{A}{11}} < 0,3 \dots \dots \dots (1p)$

b). $2n^2 + 10n + 50 = 2(n^2 + 5n + 25) = 2[n(n+5) + 25]$

$n(n+5)$ este un număr par, $\forall n \in \mathbb{N} \dots \dots \dots (1p)$

$\Rightarrow n(n+5) + 25$ este un număr natural impar, $\forall n \in \mathbb{N} \dots \dots \dots (1p)$

Deoarece 2 divide $2n^2 + 10n + 50$ dar 2^2 nu divide $2n^2 + 10n + 50$ rezultă că

$\sqrt{2n^2 + 10n + 50} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \dots \dots \dots (1p)$

Problema 2. (7 puncte) Fie numerele $A = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$

și $B = \left(3^{51} - 2^{85} + 3^{1651} : 81^{400}\right) : (-4^{41}) + \sqrt{1296} + \sqrt{(8-5\sqrt{3})^2} - \sqrt{75} + \sqrt{2^8}$.

a). Comparați numerele A și B .

b). Verificați dacă numerele $3A$ și $\sqrt{B}$ sunt elemente ale mulțimii

$$M = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+1}{2x-5} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Soluție. a). $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{35}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{63}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} \dots \dots \dots (1p)$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{7}}{7} + \frac{\sqrt{7}}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \dots \dots \dots (1p)$$

$$B = (-3^{51} + 2^{85} + 3^{51}) : (-2^{82}) + \sqrt{2^4 \cdot 3^4} + |8 - 5\sqrt{3}| - 5\sqrt{3} + 2^4 \dots \dots \dots (1p)$$

$$= -2^3 + 2^2 \cdot 3^2 - 8 + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 16 = 36. \text{ Cum } \frac{2}{3} < 36 \Rightarrow A < B. \dots \dots \dots (1p)$$

b) Arată că $M = \{1; 6\} \dots \dots \dots (1p)$

Arată că $3A \notin M \dots \dots \dots (1p)$

Arată că $\sqrt{B} \in M \dots \dots \dots (1p)$

Problema 3. (7 puncte) În triunghiul ABC , E este mijlocul laturii $[AB]$, (EF este bisectoarea $\sphericalangle AEC$, $F \in (AC)$ și (EG este bisectoarea $\sphericalangle CEB$, $G \in (BC)$).

a). Arătați că $FG \parallel AB$.

b). Dacă $FG = 3\text{ cm}$ și $AB = 9\text{ cm}$, calculați raportul ariilor triunghiurilor CFG și CAB .

Soluție. a). (EF bisectoarea $\sphericalangle AEC \Rightarrow$ cf. T. Bis. $\frac{EA}{EC} = \frac{AF}{CF} \dots \dots \dots (1p)$

(EG bisectoarea $\sphericalangle CEB \Rightarrow$ cf. T. Bis. $\frac{EB}{EC} = \frac{BG}{GC} \dots \dots \dots (1p)$

Dar $[EA] \equiv [EB] \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{BG}{GC} \Rightarrow$ cf. R.T. Thales $FG \parallel AB \dots \dots \dots (2p)$

b). Dacă $FG \parallel AB \Rightarrow \triangle CFG \sim \triangle CAB \Rightarrow \dots \dots \dots (1p)$

$$\Rightarrow \frac{FG}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \dots \dots \dots (1p)$$

$$\Rightarrow \frac{A_{CFG}}{A_{CAB}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \dots \dots \dots (1p)$$

Problema 4. (7 puncte)

Fie triunghiul ABC în care $[AO]$ este mediană, G este centrul de greutate al triunghiului ABC , iar $GD \parallel AB$ și $GE \parallel AC$, unde D și E sunt pe latura (BC) .

a). Dacă H este un punct situat în exteriorul triunghiului ABC și reprezintă simetricul punctului G față de punctul O , arătați că $GEHD$ este un paralelogram.

b). Dacă $DG \cap AE = \{M\}$ și $DG \cap BH = \{N\}$, arătați că $MN = 2DG$.

Soluție. a). Din $GD \parallel AB \Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{OG}{OA}$ și din $GE \parallel AC \Rightarrow \frac{OE}{OC} = \frac{OG}{OA}$.

Din egalitățile rapoartelor $\Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{OE}{OC}$ (1p)

Dar AD este mediană, deci $[OB] \equiv [OC] \Rightarrow [OD] \equiv [OE]$ (1) (1p)

Dar H este simetricul lui G față de $O \Rightarrow [GO] \equiv [OH]$ (2). (1p)

Din (1) și (2) rezultă $GEHD$ – paralelogram (1p)

b). Punctul O este mijlocul lui $DE \Rightarrow$ punctul G este centrul de greutate și în $\triangle ADE \Rightarrow DG = 2 \cdot GM$ (1p)

În $\triangle BGH \Rightarrow D$ centrul de greutate, deci $DG = 2 \cdot GN$ (1p)

$\Rightarrow MN = MD + DG + GM = \frac{DG}{2} + DG + \frac{DG}{2} = \frac{4DG}{2} = 2DG$, deci $MN = 2DG$. (1p)