



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 11.02.2023

Clasa a VIII-a - BAREM

## Problema 1

Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  ecuația :  $\sqrt{x^2 - 20} + \sqrt{45 - x^2} = |2x + 5|$ 

Barem:

$$\begin{cases} x^2 - 20 \geq 0 \\ 45 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 20 \\ x^2 \leq 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{20}] \cup [\sqrt{20}; +\infty) \\ x \in [-\sqrt{45}; \sqrt{45}] \end{cases} \dots\dots\dots 4p$$

Cum  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-6; -5; 5; 6\} \dots\dots\dots 1p$ Finalizare:  $x = -6$  unica soluție.....2p

## Problema 2

Arătați că pentru orice numere reale pozitive  $a, b, c, d$  are loc

$$\frac{1 + 2ab}{2 + c^2 + 2ab + d^2} + \frac{1 + 2bc}{2 + a^2 + 2bc + d^2} + \frac{1 + 2cd}{2 + a^2 + 2cd + b^2} + \frac{1 + 2da}{2 + b^2 + 2ad + c^2} \leq 2$$

Gazeta Matematică 9/2022

Barem:

Din inegalitatea mediilor avem  $\frac{c^2 + d^2}{2} \geq \sqrt{c^2 d^2}$ Deci  $c^2 + d^2 \geq 2cd$ ,  $a^2 + d^2 \geq 2ad$ ,  $b^2 + a^2 \geq 2ba$ ,  $b^2 + c^2 \geq 2cb \dots\dots\dots 2p$  $\frac{1+2ab}{2+c^2+2ab+d^2} \leq \frac{1+2ab}{2+2ab+2cd}$  și relațiile analoge.....2p

Însumând obținem

$$S \leq \frac{1+2ab}{2+2cd+2ab} + \frac{1+2bc}{2+2bc+2ad} + \frac{1+2cd}{2+2ab+2cd} + \frac{1+2ad}{2+2bc+2ad}$$

$$S \leq \frac{1+2ab+1+2cd}{2+2cd+2ab} + \frac{1+2bc+1+2da}{2+2bc+2ad} \text{ deci } S \leq 2 \dots\dots\dots 3p$$

### Problema 3

Fie  $M$  un punct care nu aparține planului pătratului  $ABCD$ , astfel încât  $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MAD$ , ( $AF$  bisectoarea  $\sphericalangle MAB$ , ( $AE$  bisectoarea  $\sphericalangle MAD$ ,  $F \in MB$ ,  $E \in MD$ ).

a) Demonstrați că  $EF \parallel (ABC)$ ;

b) Dacă  $O$  este centrul pătratului  $ABCD$ ,  $MA \perp AC$ ,  $MO = 6\sqrt{3}$ ,  $AB = 6\sqrt{2}$ , demonstrați că  $MB \perp (ADF)$ .

### Barem:

a) Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile  $MAB$  și  $MAD$  se obține  $\frac{FM}{FB} = \frac{MA}{AB}$  și  $\frac{ME}{ED} = \frac{MA}{AD}$ , de unde  $\frac{FM}{FB} = \frac{ME}{ED}$ . Aplicând reciproca teoremei lui Thales în triunghiul  $MBD$ , obținem  $EF \parallel BD$ , dar  $BD$  este inclusă în planul  $(ABC)$ , de unde  $EF \parallel (ABC)$ . .....2p

b) Triunghiurile  $MAB$  și  $MAD$  sunt congruente (LUL) de unde  $[MB] \equiv [MD]$ , deci triunghiul  $MBD$  este isoscel,  $O =$  mijlocul diagonalei  $BD$  a pătratului  $ABCD \Rightarrow MO =$  mediană și înălțime; diagonalele  $AC$  și  $BD$  din pătratul  $ABCD$  sunt perpendiculare și  $MA$  este perpendiculara pe  $AC$  din ipoteza  $\Rightarrow$  conform  $R_2T_3 \perp \Rightarrow MA \perp (ABC)$  .....2p

$\Rightarrow \Delta MAB, \Delta MAD$  și  $\Delta MAO$  sunt dreptunghice în  $A$ , din care se calculează:  $MA = 6\sqrt{2}$ ,  $MB = MD = BD = 12$ ;  $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \ell\sqrt{2} = 6$ . Dacă  $MA = AB = AD = 6\sqrt{2}$ ,  $\Delta MAB, \Delta MAD$  sunt isoscele și bisectoarele ( $AF$  și ( $AE$  sunt mediane și înălțimi. ....2p

Din  $MB = MD = BD = 12 \Rightarrow$  triunghiul  $MBD$  este echilateral și mediana  $DF$  este înălțime.

$DF$  și  $AF$  fiind perpendiculare pe  $MB \Rightarrow MB \perp (ADF)$ . .....1p

### Problema 4

Fie prisma triunghiulară regulată  $ABCA'B'C'$  cu  $AB = 8\text{ cm}$ ,  $AA' = 8\sqrt{3}\text{ cm}$ .

a) Dacă  $I$  este proiecția punctului  $A$  pe planul  $(A'BC)$ , să se demonstreze că punctul  $I$  este centrul cercului înscris în triunghiul  $A'BC$ .

b) Să se afle sinusul unghiului format de dreptele  $AB$  și  $A'C$

**Barem:**

a)  $pr_{(A'BC)}A = I, AI \perp (A'BC)$

$IM \perp BC, M \in BC \rightarrow (T3 \perp) AM \perp BC, AM = 4\sqrt{3}\text{cm}$

$IN \perp A'B, N \in A'B \rightarrow (T3 \perp) AN \perp A'B, AN = 4\sqrt{3}\text{cm}$

$IP \perp A'C, P \in A'C \rightarrow (T3 \perp) AP \perp A'C, AP = 4\sqrt{3}\text{cm} \dots\dots\dots 2p$

$\Delta AIM \equiv \Delta AIN \equiv \Delta AIP \rightarrow [IM] \equiv [IN] \equiv [IP] \dots\dots\dots 1p$

I centrul cercului înscris în triunghiul  $A'BC \dots\dots\dots 1p$

b)  $AB \parallel A'B' \rightarrow \sphericalangle(AB, A'C) = \sphericalangle(A'B', A'C) = \sphericalangle B'A'C \dots\dots\dots 1p$

Construim  $CF \perp A'B', F \in A'B' \rightarrow CF = 4\sqrt{15}\text{cm} \dots\dots\dots 1p$

$\sin \sphericalangle CA'F = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ cm} \dots\dots\dots 2p$