



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

17 februarie 2019

Clasa a XII-a

1. Fie $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ fie funcția $f_t: E \rightarrow E$,

$$f_t(x, y) = \left(x + ty + \frac{t^2}{2}, y + t\right), \forall (x, y) \in E.$$

Arătați că:

- $f_u \circ f_v = f_{u+v}, \forall u, v \in \mathbb{R}; f_0 = \mathbf{1}_E; f_t^{-1} = f_{-t}.$
- Mulțimea $G = \{f_t | t \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.
- Grupurile $(G, \circ)$ și $(\mathbb{R}, +)$ sunt izomorfe.

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian și $m, n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $H_n = \{x \in G | x^n = 1\}$, $[m, n] = \text{cmmmc}\{m, n\}$ și $H_m \cdot H_n = \{xy | x \in H_m; y \in H_n\}$. Să se arate că $H_m \cdot H_n = H_{[m, n]}$.

3. Fie $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții polinomiale de grad mai mare sau egal cu 2. Dacă $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

- demonstrați că: $\int e^x P(tgx) dx = e^x Q(tgx) + C$, unde $\text{grad} Q = \text{grad} P - 1$;
- calculați: $\int e^x (2tg^3 x + 3tg^2 x + 4tgx + 2) dx$.

4. Să se calculeze: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{x}{1 + \{\sin x\}} dx$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.