



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală
17 februarie 2019

Clasa a XI-a

1. a) Pentru adresa de e-mail, ȘTEFAN își alege password-ul schimbând între ele două câte două literele prenumelui, obținând combinația FANEST. Care este numărul de schimbări efectuate?

b) Să se rezolve în mulțimea permutărilor de gradul 5 ecuația:

$$\sigma x = x\sigma, \text{ unde } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Găsiți toate soluțiile ecuației.}$$

2. Demonstrați că sistemul
$$\begin{cases} A^3 + A^2B + AB^2 + ABA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B^3 + B^2A + BA^2 + BAB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases},$$

nu are soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Fie șirul cu termenul general: $x_n = \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + \sqrt{\frac{n+3}{n+2}} + \dots + \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \right),$

$n \in \mathbb{N}^*$ și matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & x_n - 1 \\ x_n - 1 & 1 \end{pmatrix}.$

a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$

b) Dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n).$

4. Se consideră șirul $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}, n \in \mathbb{N}^*.$ Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n\sqrt{n!}} \cdot (2 - a_n).$$

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.