Olimpiada Naţională de Matematică - Etapa locală
Clasa a IX – a
VARIANTA 1

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

1. Determinăm $a \in N$, număr impar, astfel încât

$$(a-3)^2+(a-1)^2+(a+1)^2+(a+3)^2=3\underbrace{99...9}_{2018 cifre}76\underbrace{00...0}_{2018 cifre}56$$

...............................2p

Se obține succesiv:

$$4a^2+20=3\underbrace{99...9}_{2018 cifre}76\underbrace{00...0}_{2018 cifre}56 \ ,$$

............................2p

$$a^2=3\underbrace{99...9}_{2018 cifre}76\underbrace{00...0}_{2018 cifre}36:4 \ , \quad a^2=\underbrace{99...9}_{2019 cifre}4\underbrace{00...0}_{2019 cifre}9 \ ,$$

. ...1p

$$a^2=\left(10^{2018+1}-1\right)\cdot 10^{2018+3}+4\cdot 10^{2018+2}+9=10^{2\cdot 2018+4}-6\cdot 10^{2018+2}+9=\left(10^{2018+2}-3\right)^2$$

Rezultă $a=10^{2020}-3$.

. ...2p

2.

Demonstrăm prin inducție P(n): $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^4}\right)\le \frac{9}{4}-\frac{1}{4n^2}, (\forall) n\in N^*$ **3p**

P(1):2=2. P(n)$\Rightarrow$P(n+1) conduce la inegalitatea

$$\left[\frac{9}{4}-\frac{1}{4n^2}\right]\cdot\left[1+\frac{1}{(n+1)^4}\right]\le\left[\frac{9}{4}-\frac{1}{4(n+1)^2}\right]\Leftrightarrow \frac{9}{4(n+1)^4}-\frac{1}{4n^2(n+1)^4}\le\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{4(n+1)^2}\Leftrightarrow$$ **3p**

$$\Leftrightarrow 9n^2-1\le(2n+1)(n+1)^2 \Leftrightarrow n(n-1)^2+n+1\ge 0\ (adevărat)$$ **1p**

Pentru $n=p\Rightarrow\left(1+x+x^2+...+x^p\right)^a\in Q$ și $\left(1+x+x^2+...+x^p\right)^b\in Q.$

...........................1p

Cum $(a,b)=1\Rightarrow$există $u,v\in Z$ astfel încât $a\cdot u+b\cdot v=1$; prin urmare, $\left(1+x+x^2+...+x^p\right)^{a\cdot u}\in Q$

și $\left(1+x+x^2+...+x^p\right)^{b\cdot v}\in Q\Rightarrow\left(1+x+x^2+...+x^p\right)^{a\cdot u+b\cdot v}\in Q\Rightarrow 1+x+x^2+...+x^p\in Q.$

......2p

Pentru $n=p+1\Rightarrow 1+x+x^2+...+x^{p+1}\in Q.$

.........................1p

$1+x+x^2+...+x^{p+1}=1+x\cdot\left(1+x+x^2+...+x^p\right)\in Q\Rightarrow$ există $t\in Q$ astfel încât

$1+x\cdot\left(1+x+x^2+...+x^p\right)=t\Rightarrow x=\frac{t-1}{1+x+x^2+...+x^p}$; $1+x+x^2+...+x^p\ne 0$ (din ipoteza).….2p

Cum $t-1\in Q$ și $1+x+x^2+...+x^p\in Q\Rightarrow x\in Q.$

...........................1p

1. **4.** a) Fie G, G' centrele de greutate ale celor două triunghiuri şi O un punct din plan.

Avem: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, $\overrightarrow{OG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}\right)$, ... (2 p)

$G'=G \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC'}=\vec{0}$,

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$, ... (2 p)

b) $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{CG_3}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BM}\right)=\vec{0}$, ... (3 p)

<u>Notă:</u>

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.
Se acordă numai punctaje întregi.