

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Subiect clasa a XI-a

PROBLEMA 1

(4p) a) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^3 + 1} + \frac{4}{n^3 + 2} + \dots + \frac{n^2}{n^3 + n}$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(3p) b) Fie $(s_n)_{n \geq 1}$ unde $s_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ (șirul lui A.G. Ioachimescu) și $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (constanta lui A.G. Ioachimescu). Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + s_n - s)^{\sqrt{n}}$.

PROBLEMA 2

Calculați următoarele limite:

(2p) a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$

(5p) b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2^k} (x + 2^{k-1}) \right], x \in \mathbb{R}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

PROBLEMA 3

(4p) a) Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ și ${}^T A$ - matricea transpusă. Știind că $\det(A + {}^T A) = 8$ și $\det(A + 2 \cdot {}^T A) = 27$, să se calculeze $\det(A)$.

(3p) b) Arătați că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, avem:
$$\begin{vmatrix} 1-a-b & c & c \\ a & 1-b-c & a \\ b & b & 1-a-c \end{vmatrix} \geq 0.$$

PROBLEMA 4

Matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ verifică relația $AB = 2A + 3B$. Să se arate că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ și că matricele $A - 3I_n$ și $B - 2I_n$ sunt inversabile.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat fiecărei probleme este de 7 puncte.