

Barem de corectare OLM 2015 Clasa a IX-a

1. $1 \in G \Rightarrow \sqrt{3} \in G \Rightarrow 4 \in G \Rightarrow \sqrt{6} \in G \Rightarrow 7 \in G \Rightarrow 3 \in G$ (2p)

$x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G \Rightarrow x+3 \in G$ (1p)

Demonstrăm prin inducție că $3n \in G, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Fie $P(n): 3n \in G$ (1p)

$P(1): 3 \in G$ A. Fie $n \geq 1$. Dacă $P(n)$ A avem $3n \in G \Rightarrow 3n+3 \in G \Rightarrow 3(n+1) \in G \Rightarrow P(n+1)$ A,

deci $3n \in G, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ (2p)

$2013 \in G \Rightarrow \sqrt{2015} \in G$ (1p)

2. $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(b-a)^2}{8a} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2} \leq \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 (\sqrt{b}+\sqrt{a})^2}{8a} \Leftrightarrow$ (3p)

$4a \leq a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow b+2\sqrt{ab}-3a \geq 0 \Leftrightarrow b-a+2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) \geq 0$ (2p)

$\Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+3\sqrt{a}) \geq 0, A$ (2p)

3. a) Se observă că numărul $2n-1$ este termenul de rang $n+2(1+2+3+(n-1))=n^2$ (2p)

$101 = 2 \cdot 51 - 1$ (1p)

Rangul lui 101 este $51^2 = 2601$ (1p)

b) $2n-1$ este termenul de rang n^2 , iar $2n+1$ termenul de rang $(n+1)^2$ (1p)

Astfel $2n$ ocupa pozițiile $n^2+1, n^2+2, \dots, n^2+2n$ (1p)

Întrucât $2015 \in [44^2, 45^2]$ rezulta $a_{44^2} = 87, a_{45^2} = 89, a_{2015} = 88$ (1p)

4. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$ (G este centrul de greutate al triunghiului ABD)(2p)

$3\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG}) = 4\overrightarrow{AC}$ (2p)

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$ (2p)

Deci M este simetricul lui C în raport cu A (1p)

SAU relația din enunț este echivalentă cu

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = 4(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow$ (3p)

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$ (3p)

Deci M este simetricul lui C în raport cu A (1p)