

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Barem de corectare clasa a XII-a

### PROBLEMA 1

Se consideră  $G = \left\{ A_{a,b} = \begin{pmatrix} a + 3b & b \\ 4b & a + 3b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_6, \det(A) = \hat{1} \right\}$ .

(4p) a) Arătați că  $(G, \cdot)$  este grup abelian de ordin patru, în care fiecare element coincide cu inversul său.

(3p) b) Determinați subgrupurile lui  $(G, \cdot)$ .

Soluție:

a) Din condiția  $\det(A) = \hat{1}$ , rezultă ecuația  $a^2 + 5b^2 = \hat{1}$  în .....1 punct

cu soluțiile  $(\hat{1}, \hat{0}), (\hat{2}, \hat{3}), (\hat{4}, \hat{3}), (\hat{5}, \hat{0})$  ..... 1 punct

Se face tabla înmulțirii matricelor pe  $G$ , de unde rezultă concluzia.....2 puncte

b)  $G$  conține matricea unitate și trei matrice de ordin 2, prin urmare  $G$  este grup Klein, având cele două subgrupuri improprii și cele 3 generate de elementele de ordin 2.....3 puncte

(problemă propusă de Liceul Teoretic "Ion Agârbiceanu" Jibou)

### PROBLEMA 2

Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu element neutru  $e$  astfel încât  $x^{-1} = x$ ,  $\forall x \in G$  și  $a \in G - \{e\}$ . Arătați că oricare ar fi funcția  $f: G \rightarrow G$ , funcția  $g: G \rightarrow G$ ,  $g(x) = f(x) \cdot f(ax)$  nu este injectivă.

Soluție:

Din  $x^{-1} = x$ ,  $\forall x \in G$  rezultă  $x^2 = e$ ,  $\forall x \in G$  .....1 punct

$(xy)^2 = e = e \cdot e = x^2 \cdot y^2$ ,  $\forall x, y \in G$  .....1 punct

$xyxy = xxyy \Rightarrow yx = xy$ ,  $\forall x, y \in G \Rightarrow (G, \cdot)$  grup abelian .....1 punct

$g(a) = f(a) \cdot f(a^2) = f(a) \cdot f(e)$  .....1 punct

$g(e) = f(e) \cdot f(ae) = f(e) \cdot f(a)$  .....1 punct

Deoarece  $G$  este abelian, rezultă  $f(a) \cdot f(e) = f(e) \cdot f(a)$  .....1 punct

$\Rightarrow g(a) = g(e)$ ,  $a \neq e \Rightarrow g$  nu este injectivă .....1 punct

(problemă selectată și propusă de prof. Lucaciu Simona – Colegiul Național "Silvania" Zalău)

**PROBLEMA 3**

Să se determine toate funcțiile  $f : R \rightarrow (0, \infty)$ , primitivabile, care verifică relația

$$F(x) + \ln(f(x)) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \forall x \in R, \text{ unde } F : R \rightarrow R \text{ este o primitivă a lui } f \text{ și } F(0) = 0.$$

Soluție:

$$\text{Din ipoteză} \Rightarrow F(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \ln(f(x)), \forall x \in R \Rightarrow F(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{f(x) \cdot \sqrt{1+x^2}}\right), \forall x \in R$$

$$\Rightarrow e^{F(x)} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{f(x)}, \forall x \in R \Rightarrow e^{F(x)} \cdot f(x) = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in R \quad \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

$$\text{și cum } F'(x) = f(x), \forall x \in R, \text{ se ajunge la } (e^{F(x)})' = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow (e^{F(x)})' = (x + \sqrt{x^2+1})'$$

$$(e^{F(x)} - (x + \sqrt{x^2+1}))' = 0, \forall x \in R \Rightarrow e^{F(x)} - (x + \sqrt{x^2+1}) = c, \forall x \in R \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Pentru } x=0 \Rightarrow e^{F(0)} - 1 = c \Rightarrow c=0 \Rightarrow e^{F(x)} = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \forall x \in R$$

$$\Rightarrow f : R \rightarrow (0, \infty) \quad f(x) = F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in R \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

(selectată și propusă de Colegiul Național „Simion Bărnuțiu” Șimleu Silvaniei)

**PROBLEMA 4**

$$(3p) \text{ i) Să se calculeze } \int \frac{\sin^2 x + \sin 2x + 1}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx, \quad x \in R.$$

$$\text{ii) Fie } I_n = \int \frac{x^n + nx + 1}{x^{n+2} + x^2} dx, \quad x > 0, \quad n \in N, n \geq 1.$$

$$(2p) \text{ a) Calculați } I_1.$$

$$(2p) \text{ b) Calculați } I_n, \quad n \geq 2.$$

Soluție:

$$\text{i) } I = \int \frac{\sin^2 x + e^{-x} + 1}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx + \int \frac{\sin 2x - e^{-x}}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$I = x + \int \frac{(e^{-x} + \sin^2 x + 1)'}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx = x + \ln(e^{-x} + \sin^2 x + 1) + C \quad \dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) a) } I_1 &= \int \frac{2x+1}{x^3+x^2} dx = \int \frac{x+1}{x^2(x+1)} dx + \int \frac{x}{x^2(x+1)} dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x(x+1)} dx \quad \dots\dots 1 \text{ punct} \end{aligned}$$

$$I_1 = -\frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1) + C \quad \dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{b) } I_n = \int \frac{x^n+1}{x^2(x^n+1)} dx + \int \frac{nx}{x^2(x^n+1)} dx \quad \dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{nx^{n-1}}{x^n(x^n+1)} dx = -\frac{1}{x} + \int \frac{(x^n)'}{x^n} dx - \int \frac{(x^n+1)'}{x^n+1} dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \ln(x^n) - \ln(x^n+1) + C \quad \dots\dots 1 \text{ punct}$$

(problemă selectată și propusă de prof. Lucaciu Simona – Colegiul Național "Silvania" Zalău)